

BACCALAURÉAT BLANC DE MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Session Janvier 2023

Sujet 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collègue », est autorisé.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et **un seul** des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Exercice 1. Commun à tous les candidats**(10 points)****Suites numériques : évolution d'une population.**

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.

Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus.

On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,6 \\ u_{n+1} &= 0,75.u_n (1 - 0,15.u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année 2020 + n .

- 1) Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f(x) = 0,75.x(1 - 0,15.x).$$

- 2) Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$ et dresser son tableau de variations.

- 3) Résoudre dans l'intervalle $[0; 1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 4) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) .

- 5) Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

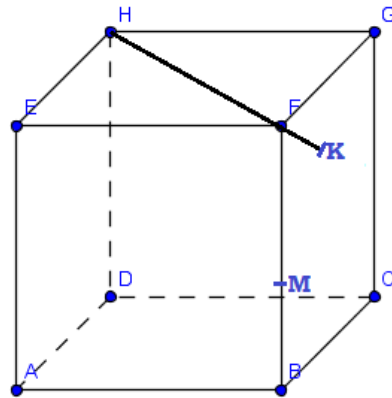
a) Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

b) Le biologiste a programmé en langage Python la fonction **menace()** ci-dessous :

```
def menace() :  
    u = 0,6  
    n = 0  
    while u > 0,02 :  
        u = 0,75*u*(1-0,15*u)  
        n = n+1  
    return n
```

Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction `menace()`.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2. Commun à tous les candidats**(5 points)****Géométrie dans l'espace.** $ABCDEFGH$ est un cube.Soit le point K défini par $\overrightarrow{HK} = \frac{5}{4}\overrightarrow{HF}$ et M un point du segment $[BF]$.

- 1) Les points D, M, K et H sont-ils coplanaires? Justifier votre réponse.
- 2) Montrer qu'il existe un unique $t \in [0; 1]$ tel que : $\overrightarrow{BM} = t \cdot \overrightarrow{BF}$.
- 3) Sans utiliser les coordonnées montrer que si $t = \frac{4}{5}$ alors les points D, M et K sont alignés.
- 4) On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
 - a) Ecrire les coordonnées du point M en fonction de t .
 - b) Démontrer à l'aide des coordonnées que les points D, M et K sont alignés si et seulement si $t = \frac{4}{5}$.

Exercice 3. Commun à tous les candidats**(5 points)****Croissances comparées et Vrai-Faux****1) Croissances comparées.**On suppose connu le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

2) Vrai-Faux.

Pour chaque question suivante et chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée.

Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une proposition non démontrée ou mal démontrée ne rapporte aucun point.

- a) Les suites u et v , définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = \frac{n}{n+1}$ ont le même sens de variations.
- b) On considère trois suites définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant :

$$u_n = \sqrt{n}, \quad v_n = n \quad \text{et} \quad u_n \leq w_n \leq v_n.$$

- (i) u et w ont le même sens de variations.
- (ii) u minore v .
- (iii) w converge.
- (iv) On ne peut savoir si $w - u$ converge.

Exercice au choix du candidat

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices suivants A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

(10 points)

Principaux domaines abordés :

Fonction exponentielle, limites, dérivation.

1) **Etude du signe d'une fonction g .**

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x + x + 1$.

- a) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
- b) Calculer $g'(x)$ et donner le tableau de variations de g .
- c) On admet que l'équation : $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$, notée α et que $\alpha \in]-2; -1[$.
- Justifier que pour tout $x \leq \alpha$, $g(x) \leq 0$ et pour tout $x \geq \alpha$, $g(x) \geq 0$.

2) **Variations d'une fonction f .**

Soit pour tout réel x , $f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

- a) Calculer la limite de f en $-\infty$ et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
- b) Calculer la limite de f en $+\infty$.
- c) Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $y = x$.
- d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{e^x \cdot g(x)}{(e^x+1)^2}$.
- e) i) Donner le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- ii) Montrer que : $f(\alpha) = \alpha + 1$.
- iii) En déduire que si $x \in [\alpha; 0]$ alors $f(x) \in [\alpha; 0]$

Exercice B

(10 points)

Principaux domaines abordés :

Fonction exponentielle, limites, dérivation, convexité, points d'inflexion.

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x.e^{x-1} + 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
c) Calculer la dérivée de f .
d) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
e) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.
- 2) a) Calculer la dérivée seconde f'' de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
b) Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
c) Déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f en justifiant votre réponse.
- 3) Soit a un réel strictement positif.
Le but de cette question est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a , qui passe par l'origine O .
 - a) Donner une équation de la tangente T_a à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .
 - b) Démontrer qu'une tangente à $\mathcal{C}_f$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité : $1 - a^2.e^{a-1} = 0$.
 - c) En utilisant la calculatrice déterminer les racines de l'équation : $1 - x^2.e^{x-1} = 0$ sur $\mathbb{R}$.
 - d) Montrer que l'équation de la tangente recherchée est : $y = 2.x$.

Fin de l'épreuve.