BACCALAURÉAT BLANC DE MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Session Janvier 2023

Sujet 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et **un seul** des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Exercice 1. Commun à tous les candidats (10 points)
Suites numériques : évolution de nombre d'abonnés.

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020 + n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1000$.

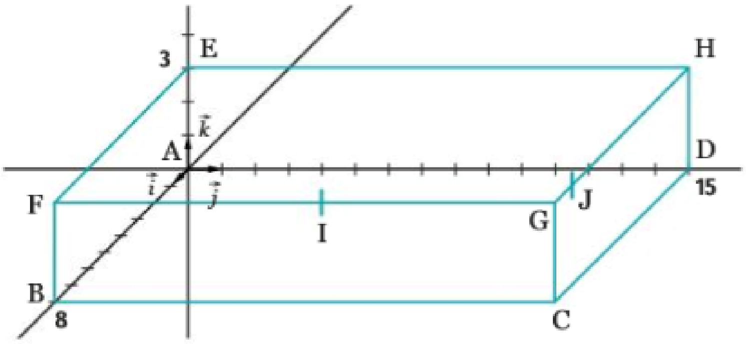
1) Calculer u_1.
2) Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9.u_n + 250$.
3) La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par suite(10).

```
def suite( n) :
  u = 1000
  for i in range(n) :
    u = 0,9*u + 250
  return u
```

4) a) Montrer,à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :
$$u_n \leqslant 2500.$$
   b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
5) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2500$ pour tout entier naturel n.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,9$ et de terme initial : $v_0 = -1500$.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que :
$$u_n = -1500 \times (0,9)^n + 2500.$$
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.
6) Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2200.
   Déterminer cette année.

Exercice 2. Commun à tous les candidats (5 points)
Géométrie dans l'espace.

L'espace est rapporté au repère $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Dans ce repère, on a tracé le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ comme indiqué dans la figure.



Les points $I(8;8;3)$ et $J(7;15;3)$ sont placés respectivement sur les segments $[FG]$ et $[GH]$.

1) Donner les coordonnées du point C.
2) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$.
3) Soit K un point de la droite (EF).
   Déterminer les coordonnées de K pour que les points I, J et K soient alignés.
4) Soit M un point de la droite (EH).
   a) Déterminer les coordonnées de M pour que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ soient coplanaires.
   b) Que peut-on dire dans ce cas des plans (IJC) et (AMK) ?

Exercice 3. Commun à tous les candidats **(5 points)**
Croissances comparées et Vrai-Faux

1) **Croissances comparées.**
   On suppose connu le résultat suivant : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
   Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \lim_{x\to+\infty} x^n.e^{-x} = 0.$$
2) **Vrai-Faux.**

   Pour chaque question suivante et chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une proposition non démontrée ou mal démontrée ne rapporte aucun point.

   a) On considère trois suites u,v et w définies sur $\mathbb{N}^*$ et vérifiant :
$$u_n = \frac{1}{n}, \quad v_n = \frac{1}{n^2} \quad et \quad v_n \leq w_n \leq u_n.$$
   u, v et w ont le même sens de variations.

b) Une suite u est définie sur $\mathbb{N}^*$ et vérifie :

$$u_n \leq 1+\sqrt{n}, \quad u_n \geq \frac{1}{n} \quad et \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

(i) les suites (u_n) et $(\frac{1}{n})$ ont le même sens de variations.
(ii) Les suites (u_n) et $(\sqrt{n})$ ont le même sens de variations.
(iii) u converge.
(iv) u diverge.

Exercice au choix du candidat

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices suivants A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A (10 points)

Principaux domaines abordés :
Fonction exponentielle, limites, dérivation.

Soit f et g les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \qquad g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

1) **Etude de deux fonctions f et g.**
   a) Etudier la parité des fonctions f et g.
   b) Calculer $g'(x)$ et donner le tableau de variations de g.
   c) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
   d) On admet que l'équation : $g(x)=1$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}_+$, notée α et que $\alpha \in]0;1[$.
   Justifier que pour tout $x \leq \alpha$, $g(x) \leq 1$ et pour tout $x \geq \alpha$, $g(x) \geq 1$.
2) a) Calculer $f'(x)$ et donner le tableau de variations de f.
   b) Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'abscisse du point en lequel c'est atteint ainsi que sa valeur.
   c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R} \ : \ e^x+e^{-x} \geq 2$.
3) **De la trigonométrie hyperbolique.**
   Montrer les égalités suivantes :
   a) $\forall x \in \mathbb{R}: \ (f(x))^2-(g(x))^2=1$.
   b) $\forall x \in \mathbb{R}: \ g(2x)=2.f(x).g(x)$.
   c) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}: \ (f(x)+g(x))^n = f(n.x)+g(n.x)$.

Remarque : Les fonctions f et g traitées dans l'exercice A sont appelées cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.

Exercice B (10 points)

Principaux domaines abordés :
Fonction exponentielle, limites, dérivation, convexité, points d'inflexion.

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 + x.e^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - x + e^{x}.$$

   a) Dresser le tableau de variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.

   b) En déduire le signe de g.

2) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

3) On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   a) Montrer que le signe de f' est celui de g.

   b) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4) Déterminer l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

5) Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente $(\mathcal{T})$.

6) Calcul la dérivée seconde f'' de f.

7) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

8) Déterminer les éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}$ en justifiant votre réponse.

Fin de l'épreuve.