Cours Terminale-Spécialité : Théorie des ensembles.

Théorie des ensembles

Définition.

(Ensemble.) Un ensemble est une collection d'éléments que l'on peut énumérer ou définir par une propriété, noté souvent par une lettre majuscule.
Un ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'ensemble vide noté : $\emptyset$

Exemple 1. Soit A l'ensemble des chiffres pairs, $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
Soit B l'ensemble des nombres d'un grille Loto, $B = \{x \in \mathbb{N}/1 \leqslant x \leqslant 49\}$.

Définition.

(Appartenance.) Un ensemble est constitué d'éléments. On représente souvent un élément par un minnuscule. Un élément "a" appartient à un ensemble "A" est noté : $a \in A$. Le symbole $\in$ signifie "appartient à".

Définition.

(Sous-ensemble, Inclusion.) On dit qu'un ensemble A est un sous-ensemble ou une partie d'un ensemble E si et seulement si tout élément de A est élément de E ou si $A = \emptyset$, on dit alors que A est inclus dans E et on note : $A \subset E$, ainsi :

$$A \subset E \Leftrightarrow \forall a \in A, a \in E \quad ou \quad A = \emptyset.$$

Le symbole $\subset$ signifie et se lit inclus dans.

Exemple 2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Définition.

(Complémentaire.) On appelle le complémentaire de l'ensemble A dans l'ensemble E, l'ensemble noté $\overline{A}$ ou $E \setminus A$ formé des éléments de E qui ne sont pas dans A ainsi :

$$a \in E \setminus A \Longleftrightarrow a \in E \quad et \quad a \notin A.$$

Le symbole $\notin$ signifie n'appartient pas.

Définition.

(Intersection.) On appelle intersection de deux sous-ensembles A et B dans un ensemble E, l'ensemble noté : $A \cap B$ (on lit A inter B) formé des éléments communs à A et à B. ainsi :

$$x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \quad et \quad x \in B.$$

Remarque. Lorsqu'il n'existe aucun élément commun à A et à B c'est à dire : $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont disjoints.

Définition.

(Union.) On appelle union de deux sous-ensembles A et B dans un ensemble E, l'ensemble noté : $A \cup B$ (A union B) constitué des éléments qui appartiennent à A ou à B (éventuellement aux deux, le "ou" n'est pas exclusif). ainsi :

$$x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A \quad ou \quad x \in B.$$

Théorème 1.

(Lois de Morgan.) Soit A et B deux sous-ensembles de l'ensemble E. On note $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les complémentaires respectifs de A et B dans l'ensemble E.On a alors :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad et \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Théorème 2.

(Distiributivité.) Soit les ensembles A, B et C d'un ensemble E. On a les égalités suivantes :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad et \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Définition.

(Produit cartésien.) Soit E et F deux ensembles. L'ensembles des couples (x, y) formé d'un élément x de E et d'un élément y de F (dans cet ordre) est noté : $E \times F$ et appelé produit cartésien de E et F. On note : $E \times E$ sous la fome E^2.
De manière générale $E \times E \times ... \times E$ (n fois) est l'ensemble noté aussi E^n formé des n-uplet $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tel que : $x_1, x_2, ...x_n$ sont des éléments de E.

Exemple 3. Soit E et F les ensembles suivants : $E\{1, 2, 3\}$, $F = \{a, b\}$. On a : $E \times F = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.

Fin.