Cours Terminale-Spécialité : Sommes et produits.

1 Sommes

La notation $\sum$ (lettre grecque "sigma majuscule") a été introduite par le mathématicien **Leonard Euler** pour symboliser une addition de termes consécutifs.

Définition.

(Somme.) p étant un entier naturel, $p \geqslant 1$.
La somme des termes $a_1 + a_2 + ... + a_p$ est symbolisée par l'expression $\sum\limits_{k=1}^{p} a_k$, qui se lit "somme des a_k pour k variant de 1 à p".

Remarque. Dans la somme $\sum\limits_{k=1}^{p} a_k$ la lettre k est appelée l'indice de sommation. k commence à la valeur 1 et finit à la valeur p en prenant toutes les valeurs entière itermédiaires. Pour spécifier cet indice, on utilise, le plus souvent, les lettres i ou j ou k.

Exemple 1.

1. $a_1 + a_2 + a_3$ est noté $\sum\limits_{k=1}^{3} a_k$, $a_3 + a_4 + ... + a_{20}$ est noté $\sum\limits_{k=3}^{20} a_k$.
2. $5 + 6 + 7 + 8 + ... + 21 + 22$ est noté $\sum\limits_{k=5}^{22} k$
3. La somme des 10 premiers entiers naturels impairs est :
   $S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$ est notée $\sum\limits_{k=1}^{10} (2k+1)$

Prépas Maths 360.

Proposition 1.

Soit n un entier naturel, $a_1, a_2, ...a_n$ et $b_1, b_2, ...b_n$ des nombres réels et c un réel constant on a :

1. $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$.
2. $\sum_{i=1}^{n}(c \times a_i) = c \times \sum_{i=1}^{n} a_i$.
3. $\sum_{i=1}^{n} c = n \times c$.

Exercice 1. Ecrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$:

1. $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{12}, \quad \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{11}{12}$$
   .
2. $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + ... + 40 \times 41$.

Exercice 2. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{4} k^2, \quad \sum_{k=1}^{4} 2^k, \quad \sum_{k=3}^{20}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right).$$

Compléments :

2 Produits

Définition.

(Produit.) p étant un entier naturel, $p \geqslant 1$.
Le produit des termes $a_1 \times a_2 \times ... \times a_p$ est symbolisée par l'expression $\prod_{k=1}^{p} a_k$, qui se lit "produit des a_k pour k variant de 1 à p".

Définition.

(Factoriel n.) Soit n un entier naturel, on appelle factoriel n le produit des entiers consécutifs de 1 à n on la note $n!$ ainsi :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n.$$

Par convention : $0! = 1$.

Exemple 2.

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6, \quad 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

Fin.

Prépa Maths360