Cours Terminale-Spécialité : Connecteurs logiques.

Connecteurs Logiques

Définition.

(Proposition.) Une proposition est un énoncé simple susceptible d'étre vrai ou faux.

Définition.

(Proposition composée.) Une proposition composée est une proposition construite à partir de propositions simples reliées par des connecteurs logiques.

Exemple 1. Les propositions suivantes sont composées :

1. "Il fait beau et $3+8=7$".
2. "S'il pleut alors je prenderais mon parapluie."

Définition.

(Négation d'un proposition.) La négation d'une proposition P est une proposition prenant la valeur de vérité opposée à celle de P. On la note "Non P".

Définition.

(Conjonction de deux propositions.) Deux propositions P et Q reliées par le connecteur "Et" forment une proposition composée appelée la conjonction des deux propositions. On la note "P et Q". "P et Q" n'est vrai que si P et Q sont toutes les deux simultanément vraies.

Exemple 2. Le conjonction des deux propositions :"P : $x<10$" et "Q : $x>2$" peut s'écrire : "P et Q : $x\in]2;10[$".

Définition.

(Disjonction de deux propositions.) Deux propositions P et Q reliées par le connecteur "Ou" forment une proposition composée appelée la disjonction des deux propositions. On la note "P ou Q". "P et Q" est vraie si l'une ou moins des deux propositions P ou Q est vraie.

Exemple 3. Le disjonction des deux propositions :"P : $x > 10$" et "Q : $x < 2$" peut s'écrire : "P ou Q : $x \in]-\infty; 2[\cup]10; +\infty[$".

Remarque. Le "Ou" en mathématiques est "inclusif", il n'est pas exclusif comme dans la vie courante. "P ou Q" est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies.

Définition.

(Implication.) Le connecteur logique : "Si ... alors", porte sur deux propositions (Si P alors Q) notée "$P \Rightarrow Q$" est fausse lorsque l'on a simultanément la proposition P vraie et la proposition Q fausse, la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie dans les autres cas.

Remarque. Lorsque l'on a $P \Rightarrow Q$ on dit que Q est une condition nécessaire de P et que P est une condition suffisante de Q.

Exemple 4. Soient les propositions suivantes :
"P : le triangle ABC est équilatéral."
"Q : le traingle ABC est isocéle."
L'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie alors que l'implication : $Q \Rightarrow P$ est fausse.

Remarque. **(Contraposée.)**pour montrer que : $P \Rightarrow Q$ il est parfois plus facile de démontrer : $(NonQ) \Rightarrow (NonP)$ appelée contraposée de l'implication$P \Rightarrow Q$.
Cala revient dans l'exemple précédent à dire que : Si le triangle n'est pas isocéle alors il n'est pas équilatéral.

Définition.

(Equivalence.) Le connecteur logique "Si et seulement si" porte sur deux propositions. La proposition (P si et seulement si Q) notée $P \Leftrightarrow Q$ est vrai lorsque l'on a simultanément P et Q vraies, ou fausses. Elle est fausse dans les autres cas. L'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ se lit aussi "P est une condition nécessaire et suffisante de Q".

Remarque. Pour démontrer une équivalence, on procédera souvent en deux étapes : $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ (On dit qu'on a procédé par double implication).

Exemple 5. L'équivalence $(x = -2) \Leftrightarrow (x^2 = 4)$ est fausse car l'implication : $(x = 4) \Rightarrow (x = -2)$ est fausse.

Fin.