Contrôle en Maths-Expertes.
Matrices et systémes linéaires.

Exercice 1. Inverse d'une matrice.(4 points)
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

où a et b sont deux réels.
Calculer a et b pour que : $T = T^{-1}$.

Exercice 2. Puissances niéme d'une matrice et diagonalisation. (6 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. En déduire A^6 puis A^{3n} où n est un entier naturel non nul.
3. Calculer l'inverse de A^3.

Exercice 3. Résolution matricielle d'un système linéaire.(8 points)
On considère les matrices :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad et \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer D^2 et D^3.
2. On note P^{-1} la matrice inverse de la matrice P. Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.
3. Soit A la matrice telle que : $A = P.D.P^{-1}$. Calculer A.
4. Montrer que : $A^2 = P.D^2.P^{-1}$ et $A^3 = P.D^3.P^{-1}$.

Exercice 4. Inverse d'une matrice.(4 points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer A^2 et montrer que : $A^2 + A - 2I_3 = 0$.
(2) En déduire que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de A et I_3.
(3) Expliciter la matrice A^{-1}.

Exercice 5. Puissances niéme d'une matrice et diagonalisation. (4 points)
Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer les produits $P.Q$ et $Q.P$. Que peut-on en déduire ?

(2) On définit la matrice : $D = Q.A.P$.
Calculer D et exprimer D^n en fonction de n pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

(3) (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A^n = P.D^n.Q$.

(b) Calculer alors A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6. Résolution matricielle d'un système linéaire.(2 points)
On considère le systéme linéaire suivant :

$$(S) : \begin{cases} x + y + 2.z = 1 \\ 2.y + z = 1 \\ 2.x - y + 2.z = 1 \end{cases}$$

(1) Ecrire le système (S) sous forme matricielle : $A.X = B$ ou A est une matrice carrée à coéfficients réels d'ordre 3, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) En utilisant la matrice $C = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ montrer que la matrice A est inversible et donner son inverse A^{-1}.

(3) Le systéme (S) est-il de Cramer ? Justifier votre réponse.

(4) Résoudre le système (S).

Fin de l'épreuve.