

Devoir Surveillé de Mathématiques en première.

Dérivation, optimisation et statistiques.

Exercice 1. (8 points).

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2 - \frac{2(1-x)}{x^2+1}.$$

On note C_f sa courbe représentative.

1. (a) Calculer $f'(x)$; vérifier que : $f'(x) = \frac{-2(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^2}$.
 (b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f .
 On ne demande pas les valeurs exactes des extremums mais une valeur arrondie aux centièmes.
2. Déterminer l'équation de la tangente T à (C_f) au point A d'abscisse 1.
3. On veut montrer qu'il existe un point B de (C_f) tel que la tangente à (C_f) en B est parallèle à la droite (Δ) d'équation : $y = -x$.
 (a) Montrer que le problème revient à résoudre l'équation : $x^4 + 4x + 3 = 0$.
 (b) Vérifier que : $x^4 + 4x + 3 = (x+1)^2(x^2 - 2x + 3)$.
 (c) Conclure

Exercice 2. (4 points.)

ABC est un triangle rectangle en A avec $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 5$.

M est un point de $[BC]$ tel que $BM = x$ avec $0 \leq x \leq 5$.

Le but est de savoir comment placer M pour que l'aire du quadrilatère $APMQ$ soit maximale.

1. Exprimer PM et MQ en fonction de x .
2. Justifier que l'aire $APMQ$ s'écrit $f(x) = \frac{12}{25}x(5-x)$.
3. Etudier f sur $[0; 5]$ et répondre au problème posé.

Exercice 3. (6 points.)

Un laboratoire pharmaceutique effectue une étude statistique sur un médicament produit sous la forme de granules de 100 mg. Chaque granule contient 0.024% de manganèse, le reste étant constitué par un excipient à base de lactose.

La tableau suivant donne la différence de masse, en mg, de chaque granule d'un lot testé, par rapport au poids théorique.

Différence	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Effectif A	3	7	14	29	70	75	80	42	39	33	8

- a. (a) Déterminer la valeur médiane, le 1er et le 3ème quartile de cette série, justifier!
 (b) Construire le diagramme en boîte de la série.
- b. (a) Calculer la moyenne \bar{x} et l'écart type s de cette série.
 (b) On considère qu'un lot est valable lorsque plus de 95% des granules ont une différence de masse comprise dans l'intervalle $[\bar{x} - 2s; \bar{x} + 2s]$. Ce lot est-il valable ?
- c. Calculer la masse moyenne de manganèse par granule. Quel est l'écart type correspondant ?

Exercice 4. (Bonus 2 points.)

Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; 1[$ on a :

$$\frac{4}{x} - \frac{9}{x-1} \geq 25.$$

Fin de l'épreuve.