Devoir Surveillé de Mathématiques en première.
Suites numériques.

Exercice 1. (8 points).
Soit (u_n) ma suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 5, \quad u_{n+1} = \frac{10.u_n}{10 + u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On admet que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 0$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. On pose $v_n = \frac{5}{u_n}$ pour tout entier n.
   Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et donner sa raison et son premier terme.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
4. En déduire u_n en fonction de n.
5. Calculer : $S = \frac{2}{u_0} + \frac{2}{u_1} + \frac{2}{u_2} + ... + \frac{2}{u_{21}}$.

Exercice 2. (8 points.)
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}.u_n + 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On pose : $v_n = u_n - 10$ pour tout entier naturel n.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera les caractéristiques.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
4. En déduire u_n en fonction de n.
5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
6. Calculer $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ en fonction de n pour tout entier n.

Exercice 3. (2 points.)
Résoudre dans $]-\pi; \pi[$ l'équation :

$$\sin\left(3.x\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Exercice 4. (2 points.)

On considère l'algorithme suivant :

Initialisation :
Affecter à N la valeur 0.
Affecter à U la valeur 4.
Tant que $U < 100$ faire :
Affecter à N la valeur $N + 1$.
Affecter à U la valeur $2U + 5$.
Fin du Tant que.
Sortie : Afficher N et U.

1) A quoi sert cet algorithme ?
2) Faire fonctionner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que vous recopierez. Vous ferez autant de colonnes que nécessaires.

Initialisation		
N		
U		

3) Préciser l'affichage obtenu.

Exercice 5. (Bonus 2 points.)
Pour tout nomber entier naturel $n \geqslant 1$, on note D_n le nombre de multiple de 2 appartenant à l'intervalle $[1; 10^n]$ et T_n le nombre de multiples de 3 appartenant à ce même intervalle.
Les suites (D_n) et (T_n) sont-elles géométriques ?

Fin de l'épreuve.