

Devoir surveillé en première. Suites arithmético-géométriques

- Exercice 1.**
1. Calculer la moyenne et l'écart-type, arrondis à l'unité, des points marqués, puis des points encaissés.
 2. Construire le diagramme en boîte de chacune de ces deux séries.
 3. Calculer l'écart interquartile.
 4. Commenter les résultats précédents.

Exercice 2. (5 points).

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 4$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = 2.u_n + 1$.

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ?
2. La suite (u_n) est-elle géométrique ?
3. Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = u_n + 1$.
 - (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique, donner sa raison et son terme initial.
 - (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 3. (10 points).

Partie A : Suites arithmético-géométriques

On considère une suite (u_n) de terme initial u_0 et telle que, pour tout entier n , $u_{n+1} = a.u_n + b$. dite arithmético-géométrique.

1. (a) Que dire de la suite (u_n) si $a = 1$?
(b) Que dire de la suite $-u_n$ si $b = 0$?
2. On suppose que $a \neq 1$ et $b \neq 0$.
 - (a) Calculer la solution c de l'équation : $x = a.x + b$.
 - (b) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - c$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - (c) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de u_0 , a , b , n .
 - (d) On note S_n la somme $v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et T_n la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
Exprimer S_n en fonction de u_0 , a , b , n .
En déduire que pour tout n on a :

$$T_n = (n+1) \cdot \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \cdot \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Partie B : Application

Depuis le 1^{er} Janvier 2000, la population d'un village évolue de la façon suivante d'une année sur l'autre :

3% des habitants quittent le village.

12 personnes viennent s'installer au village.

On note u_n la population du village au 1^{er} Janvier de l'année 2000 + n avec $u_0 = 4000$.

1. Montrer que (u_n) est une suite arithmético-géométrique et préciser les valeurs des réels a , b et c définis dans la partie A.
2. Donner l'expression de u_n en fonction de n en utilisant les résultats de la partie A.