Devoir surveillé en Terminale-Spécialité.
Suites, probabilités et fonctions.

Exercice 1. (10 points.)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 24, v_0 = 6, \left\{ \begin{array}{ll} u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}, & ; \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n.v_n}, & . \end{array} \right.$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. a. Montrer que : $u_n^2 - v_n^2 = \frac{(u_{n-1}-v_{n-1})^2}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   b. En déduire que : $u_n - v_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   c. En déduire que : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. Exprimer v_n en fontion de u_{n+1} et u_n et en déduire que (v_n) converge vers la même limite que (u_n).
5. Expliquer pourquoi l'algorithme ci-dessous, censé donner le premier rang tel que : $|u_n - v_n| < 0,1$ est incorrect et le modifier pour qu'il fonctionne.
   1. Liste des variables utilisées
   2. n : entier
   3. u,v : réels
   4. Traitement
   5. Donner à u la valeur de 24
   6. Donner à v la valeur de 6
   7. Donner à n la valeur de 0
   8. Tant que $(|u - v| >= 0,1)$ faire
   9. Donner à u la valeur $(u + v)/2$
   10. Donner à v la valeur $\sqrt{u.v}$
   11. Donner à n la valeur n+1
   12. Fin tant que
   13. Sortie
   14. Afficher la valeur de n

Exercice 2. (3 points.)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4.$$

Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$? Donner, pour chacune des solutions, un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 3. (3 points.)
Soit f une fonction continue définie de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$.
Montrer que :

$$\exists c \in [0, 1] : \quad f(c) = c.$$

On pourra appliquer le théorème des valeurs intérmédiaires à une fonction bien choisie !

Exercice 4. (4 points.)
Quand elle va au cinéma, Nadia va toujours à celui qui est à côté de chez elle, le mardi soir à la séance de $20h$.
Elle a remarqué que :
- Si elle y est allée un mardi, il n'y a que 40% de chance qu'elle y aille le suivant.
- Si elle n'y est pas allée un mardi, il y a 80% de chance qu'elle y aille le suivant.

  Ce mardi, elle n'est pas allée au cinéma. Quelle est la probabilité qu'elle y aille dans un an (c'est à dire 52 semaines) ?
  On pourra considérer, la suite (q_n) définie pour tout n$\in \mathbb{N}$ par : $q_n = p_n - \frac{4}{7}$ ou p_n est la probabilité que Nadia aille au cinéma dans n semaines.

Fin de l'épreuve.