Exercices en Maths-Expertes.
Arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 1. .
Les trois parties I, II et III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I :
Soit $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6.7.8; 8; 10\}$.
Déterminer les paires $\{a; b\}$ d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1.
Partie II :

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
   (a) L'entier $(n-1)! + 1$ est-il pair ?
   (b) L'entier $(n-1)! + 1$ est-il divisible par un entier naturel pair ?
2. Prouver que l'entier $(15-1)! + 1$ n'est pas divisible par 15.
3. L'entier $(11-1)! + 1$ est-il divisible par 11 ?

Partie III :
Soit p un entier naturel non premier ($p \geqslant 2$).

1. Prouver que p admet un diviseur q $(1 > q)$
2. L'entier q divise-t-il l'entier $(p-1)! + 1$?
3. L'entier p divise-t-il l'entier $(p-1)! + 1$?

Exercice 2. .
Soit n un entier naturel non nul.
On considére les nombres :

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \qquad \text{et} \quad b = 2n^2 + n.$$

1. Montrer que $2n + 1$ divise a et divise b.
2. Un éléve affirme que le PGCD de a et b est $2n + 1$.
   Son affirmation est-elle vraie au fausse ?

Exercice 3. .

1 Déterminer le plus grand diviseur commun d des nombres :

$$a = 4420 \qquad b = 2772$$

2 Déterminer les restes dans la division par 5 des entiers naturels : 12^d, 12^a, 12^b.

Exercice 4. .
Trouver l'ensemble des entiers naturels n qui vérifient :

$$5^{4n} + 5^{3n} + 5^{2n} + 5^n \equiv 0 \quad \text{modulo } 13$$

(*On pourra remarquer que* : $x^4 + x^3 + x^2 + x = x(x+1)(x^2+1)$)

Mission Maths 360

Exercice 5. .
Soit n et p deux entiers naturels non nuls, x un élément de $\mathbb{Z}-\{0,1\}$ donnés, $\mathbb{Z}$ étant l'ensemble des nombres entiers relatifs.

1 Démontrer l'équivalence des propositions suivantes :
P_1 : p divise x^2-x
P_2 : pour tout entier naturel non nul n, p divise x^n-x.

2 Déterminer les entiers relatifs x tels que, pour tout entier naturel non nul n, 6 divise x^n-x.

Exercice 6. .

1 On donne deux entiers a et b et on considére l'équation : $ax-by=1$
où l'inconnue est le couple (x,y) d'entiers relatifs.
Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur a et b, pour que l'ensemble des solutions de cette équation ne soit pas vide.

2 Vérifier que le couple $(7,24)$ est solution de l'équation :

$$(E) \qquad 55x-16y=1$$

En déduire l'ensemble des couples (x,y) de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ qui sont solutions de (E).

Exercice 7. .

1 a désigne un entier naturel non nul donné.
Démontrer que le nombre $A=a(a^2-1)$ est divisible par 6.

2 Plus généralement, démontrer que $A_n=a(a^{2n}-1)$ est divisible par 6.
(n désigne un entier naturel quelconque).
Application : Démontrer que les sommes :

$$S=a_1+a_2+\cdots+a_k \qquad S_n=a_1^{2n+1}+a_2^{2n+1}+\cdots+a_k^{2n+1}$$

dans lesquelles a_1, a_2, $\cdots a_k$ désignent des entiers naturels non nuls donnés, ont le même reste de division par 6.

Exercice 8. .
On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant : « *Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre* 1 *peuvent-ils être premiers* ? »Pour tout entier naturel $p\geqslant 2$, on pose $N_p=1\ldots1$ où 1 apparait p fois. On rappelle dès lors que $N_p=10^{p-1}+10^{p-2}+\cdots+10^0$.
1. Les nombres $N_2=11$, $N_3=111$, $N_4=1111$ sont-ils premiers ? **2.** Prouver que $N_p=\dfrac{10^p-1}{9}$. Peut-on être certain que 10^p-1 est divisible par 9. **3.** On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier. On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,

$$x^n-1=(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\right).$$

a. On suppose que p est pair et on pose $p=2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_2=11$. **b.** On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p=3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_3=111$. **c.** On suppose p non premier et on pose $p=kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1. En déduire que N_p est divisible par N_k. **4.** Énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier. Cette condition est-elle suffisante ?

Exercice 9. .
n est un entier supérieur ou égal à 2.

Mission Maths 360

1. Montrer que les nombres n et $2n+1$ sont premiers entre eux.
2. On pose $\alpha = n+3$ et $\beta = 2n+1$, et on note δ le PGCD de α et de β.
   (a) Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ.
   (b) Montrer que α et β sont des multiples de 5 si et seulement si $(n-2)$ est un multiple de 5.
3. On considére les nombres définis par :

$$a = n^3 + 2n^2 - 3n \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 - n - 1.$$

   Montrer aprés factorisation que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n-1)$.
4. (a) On note d le PGCD de $n(n+3)$ et de $(2n+1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$.
   (b) En déduire le PGCD, Δ de a et b en fonction de n.
   (c) Application : Déterminer Δ pour $n = 2001$.
   Déterminer Δ pour $n = 2002$.

Exercice 10. .

Partie A :

On admet que 1999 est un nombre premier.
Déterminer l'ensemble des couples $(a;b)$ d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1999.

Partie B :

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$:
(E) : $n^2 - S\,n + 11\,994 = 0$ où S est un entier naturel.
On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.

1. Peut-on déterminer S tel que 3 soit solution de (E) ?
   Si oui, préciser la deuxième solution.
2. Peut-on déterminer S tel que 5 soit solution de (E) ?
3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11 994.
   En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

Partie C :

Comment montrerait-on que 1999 est un nombre premier ?
Préciser le raisonnement employé.
La liste de tous les nombres premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97

Exercice 11. .

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. (a) Pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
   (b) Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
   En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.
   (c) À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.
   (d) De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?
   (e) En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.
2. Soit

$$U_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i,$$

   où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Mission Maths 360

(a) Montrer que si U_n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.

(b) Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7. En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.

Exercice 12. .

1. Montrer que pour tout entier relatif n les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.
2. On considére l'?quation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.
   (a) Vérifier en utilisant par exemple la question 1, que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution (x_0, y_0) de (E).
   (b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.
   (c) **Application :** Déterminer les points de la droite D d'?quation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100. *Indication :* on remarquera que le point M de coordonnées (x, y) appartient à la droite D si et seulement si le couple $(x, -y)$ vérifie l'?quation (E).

Exercice 13. .

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}\right) = x^k - 1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. (a) Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$. Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.
   (b) Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.
3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur pgcd.
   (a) On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bézout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que : $mu - nv = d$.
   (b) On suppose u et v strictement positifs. Montrer que : $(a^m - 1) - (a^{nv} - 1)\, a^d = a^d - 1$. Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le pgcd de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.
   (c) Calculer, en utilisant le résultat précédent, le pgcd de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$.

Mission Maths 360