Exercices en Maths-Expertes.
Arithmétiques Bis.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $2n^2+1$ et n sont premiers entre eux.
2. Montrer que $2n^2+1$ et n^2+1 sont premiers entre eux.
3. Montrer que la fraction $\frac{n^3+n}{2n^2+1}$ n'est pas simplifiable.

Exercice 2. 1. Soit a et b deux entiers naturels non nuls telles qe $pgcd(a+b, a.b) = p$ avec p est un nombre premier.
   (a) Démontrer que p divise a^2.
   (b) En déduire que p divise a.
   (c) Démontrer que $pgcd(a,b) = p$.
2. On désigne par a et b deux entiers naturels tels que : $a \leqslant b$.
   Résoudre le systéme : $\begin{cases} (a+b) \wedge ab = 5, & ; \\ a \vee b = 170, & . \end{cases}$

Exercice 3. 1. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: n^2+5n+4 et n^2+3n+2 sont divisibles par $n+1$.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquels $3n^2+15n+19$ n'est pas divisible par $n+1$.
3. En déduire que pour tout n, $3n^2+15n+19$ n'est pas divisible par n^2+3n+2.

Exercice 4. Vérifier si les entiers suivants sont premiers :

$$53, 257, 373, 667.$$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{Z}$ montrer ce qui suit :

1. $5|n \Leftrightarrow n$ se termine par 0 ou 5.
2. $3|n \Leftrightarrow$ la somme des chiffres constituant n est divisible par 3.
3. $9|n \Leftrightarrow$ la somme des chiffres constituant n est divisible par 9.

Exercice 6. Déterminer le reste de la dicition euclidienne par 7 des entiers :

$$50^{100}, 100; 100^3, 50^{100} + 100^{100}.$$

Exercice 7. 1. Montrer que le carré de tout entier naturel impair est congru à 1 modulo 8.
2. Conclure les solutions de l'équation : $8x - y^2 + 1 = 0$ dans $\mathbb{N}^2$.

Exercice 8. Soit n un entier naturel premier.

1. Montrer que si p est dans $\mathbb{N}^*$ différent de n alors n divise C_n^p.
2. Montrer que pour tout a dans $\mathbb{N}$: $n|(a+1)^n - a^n - 1$.

3. Montrer par récurrence que pour tout b dans $\mathbb{N}$ on a : $n|b^n - b$.
4. Montrer que si p est premier et a un entier naturel premier avec p alors : $a^{p-1} \equiv 1[p]$.
5. Montrer que si p est premier et a dans $\mathbb{N}$ alors : a^p
   $equiv[p]$.

Exercice 9. Soit n un entier naturel tel que $n > 2$.
On considère les nombres $a = n^2 - 2n + 2$ et $b = n^2 + 2n + 2$ et on pose : $d = a \wedge b$.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
2. a. Montrer que tout diviseur commun de a et n divise 2.
   b. Montrer que tout diviseur commun de a et b divise $4n$.
3. On suppose que n est impair.
   a. Montrer que les nombres a et b sont impairs et conclure que d est impair.
   b. Montrer que $d|2$ et conclure que : $a \wedge b = 1$.
4. On suppose que a et b sont paires.
   a. Montrer que a ne divise pas a.
   b. Conclure que $d = 2p$ tel que p est impair.
   c. Montrer que : $p|n$ et conclure que : $a \wedge b = 2$.