Exercices en Maths-Expertes.

Nombres complexes bis.

Exercice 1. QCM

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré 0,5 point par réponse fausse. On ne demande pas de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro.

On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de z^2 est :

$$\mathrm{A} : 2\sqrt{2} \qquad B : 2\sqrt{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2} \qquad \mathrm{C} : 2+\sqrt{2}+\mathrm{i}\left(2-\sqrt{2}\right) \qquad D : 2\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}$$

2. z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

$$\mathrm{A} : \quad 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \qquad \mathrm{B} : \quad 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \qquad \mathrm{C} : \quad 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} \qquad \mathrm{D} : \quad 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$$

3. z s'écrit sous forme exponentielle :

$$\mathrm{A} : \quad 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}} \qquad \mathrm{B} : \quad 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}} \qquad \mathrm{C} : \quad 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}} \qquad \mathrm{D} : \quad 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}$$

4. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

$$\mathrm{A} : \quad \frac{7\pi}{8} \qquad \mathrm{B} : \quad \frac{5\pi}{8} \qquad \mathrm{C} : \quad \frac{3\pi}{8} \qquad \mathrm{D} : \quad \frac{\pi}{8}$$

Exercice 2. i désigne le nombre complexe de module A et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout nombre complexe z, on note $|z|$ son module. Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. On considére les points :

$$\begin{array}{l} A \text{ d'affixe } Z_A = 2 + i\sqrt{3} \\ B \text{ d'affixe } Z_B = 2 - i\sqrt{3} \\ C \text{ d'affixe } Z_C = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

   Tracer le triangle ABC et démontrer qu'il est rectangle.

2. L'objectif est ici, d'étudier les l'ensemble E des points du plan dont l'affixe z est solution de l'inéquation :

$$|z|^2 - 5|z| + 4 \leqslant 0.$$

   (a) Les points A, B et C, appartiennent-ils à E ?
   (b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'inéquation $x^2 - 5x + 4 \leqslant 0$.
   (c) Montrer que l'ensemble E est une couronne circulaire que l'on précisera.
   (d) Hachurer l'ensemble E.

Exercice 3. i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal, unité graphique 1 cm.

1. On considère les nombres complexes : $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -2i$. A est le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2. Soit M un point d'affixe z.

   (a) Á l'aide des points A, M et B interpréter géomètriquement $|z-2-2i|$ et $|z+2i|$.
   (b) Déterminer l'ensemble des points Δ des points M d'affixe z tels que $|z-2-2i| = |z+2i|$.
   (c) Placer les points A et B et tracer Δ dans le repère.

2. On considère les nombres complexes :

$$z_3 = \frac{3+8i}{2i} \text{ et } z_4 = \frac{1}{4}(7+i)(i-1)$$

   (a) Écrire z_3 et z_4 sous forme algébrique.

   (b) C est le point d'affixe z_3 et D est le point d'affixe z_4. Vérifier que C et D appartiennent à Δ.

3. Soit $z_5 = \sqrt{3}+i$, $z_6 = -\sqrt{3}+3i$ et $z_7 = \frac{4\sqrt{3}z_5}{9z_6}$. Calculer un module et un argument de z_5, z_6 et z_7.

Exercice 4. .

partieA :

Soit (E) l'équation d'inconnue complexe z suivante :

$$(1+3i)\overline{z} + i(z-2) = 15+13i$$

1. Montrer que (E) admet une unique solution dans $\mathbb{C}$ que l'on notera ω.
2. Ecrire ω sous forme trigonométrique puis montrer que ω^8 est réel positif.

partieB :

Soit $u = \sqrt{3}+i$ et $v = \dfrac{\omega}{u}$.

1. Ecrire v sous forme algébrique.
2. Ecrire u puis v sous forme trigonométrique.
3. Retrouver ainsi les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
4. En utilisant les formules de trigonométrie et les résultats obtenus à la question précédente, déterminer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

partieC :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \omega$, $z_B = 2-i$ et $z_C = -4+2i$.

1. Calculer $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. En déduire la nature de ABC.
2. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$\left|\frac{z-2+i}{z-5-5i}\right| = 1$$

   Déterminer $\mathcal{E}$.