Exercices en Terminale-Spécialité.
Limites de fonctions.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{si } x \leqslant -1\,; \\ -2x-1, & \text{si } x > -1. \end{cases}$
Déterminer les limites à gauche et à droite de f en -1.

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} x^3-3x^2-6 \quad b)\ \lim_{x\to 3} \frac{1-2x}{(x-3)^2} \quad c)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+1}{x^2+1} \quad d)\ \lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi.x+1}{x+2}\right).$$

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}+x \quad b)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} \quad c)\ \lim_{x\to x\to+\infty} \frac{x+1}{2-\cos(x)} \quad d)\ \lim_{x\to x\to+\infty} \frac{9x^2+2x}{3x^3-7}.$$

Exercice 4. Vrai ou Faux :

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
2. beginenumerate
3. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-g(x) = 0$.

Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$.
Déterminer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 6. Soit la fonction f définie sur $D = \mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$. et C_f sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout $x \in D$, $f(x) = x+1+\frac{2}{x-1}$.
2. Déterminer la limite en $-\infty$ et $+\infty$ de $f(x)-(x+1)$.
3. Que peut-on déduire pour C_f, représenter ce résultat graphiquement.

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$.

1. Déterminer les réels α et β tels que, pour tout réel x, $f(x) = \alpha + \frac{\beta.x}{x^2+1}$.
2. Dresser le tableau de variations complet de f.
3. Déterminer les positionsrelatives de la courbe C_f de f et de son asymptote.
4. (a) Montrer que pour tout réel x, $\frac{f(x)+f(-x)}{2} = 3$.
   (b) Que peut-on déduire pour la courbe C_f de f.
   Indication : Considérer les points $M(x; f(x))$, $M(-x; f(-x))$ et $I(0;3)$.

Exercice 8. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}-\sqrt{x}}\right), \quad \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right).$$

Exercice 9. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|) = \frac{3x^2+4|x|+3}{x^2+1}$.

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
2. Expliquer comment obtenir la courbe de g à partir de celle de f.

Exercice 10. Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{3x^2-2x+2}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la courbe C_f de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Etudier la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2+5x+1}{x^2+x-2}$.
Montrer que la courbe de f admet deux asymptotes verticales et une asymptote horizontale.

Exercice 12. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{\cos(x)+x}{\sin(x)+2}$.
Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.