Exercices en Terminale-Spécialité.
Lois binômiale.

Exercice 1. Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Il y a trois boules noires dans l'urne U_1, deux boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3, et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.
Les boules sont indiscernables au toucher.
Une partie se déroule de la façon suivante :
le joueur lance le dé,
- s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans l'urne U_1 ;
- s'il obtient un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans l'urne U_2 ;
- si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans l'urne U_3.

On désigne par A, B, C, et N les évènements suivants :
A : « Le dé amène le numéro 1. »
B : « Le dé amène un multiple de trois. »
C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni le 1 ni un multiple de trois. »
N : « La boule tirée est noire. »

1. Le joueur joue une partie.

a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$.
b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.
c. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$.
d. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$.

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$.
Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres.
Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3}, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

Exercice 2. Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B.
Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K_1 et K_2.
L'expérience est modélisée de la façon suivante :

- une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K_1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et dans K_2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$;
- une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

Partie A

Mission Maths 360

1. Soit une particule au hasard.
   Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K_1 »,
   A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K_2 »,
   B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K_1 »,
   B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K_2 »,
   C1 : « la particule entre dans K_1 »,
   C2 : « la particule entre dans K_2 ».
2. On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction.
   Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes.
   Calculer la probabilité de l'événement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K_2 ».

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B ; chaque particule A donne en se transformant une particule B.

On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t = 0$, on a $p(0) = 0,75$.

Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t) = 0,75\mathrm{e}^{-\lambda t}$, où λ est une constante réelle.

La demi-vie[1] des particules de type A est égale à 5 730 ans.

1. Calculer λ ; on prendra une valeur approchée décimale à 10^{-5} près par défaut.
2. Au bout de combien d'années 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?
3. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

Exercice 3. Dans une foire, une publicité annonce : « Un billet sur deux est gagnant. Achetez deux billets ».
Dans cet exercice, on suppose qu'effectivement, sur le nombre de billets en vente, exactement un billet sur deux est gagnant. Xavier est toujours le premier acheteur de la journée.
A.Il est mis en vente chaque jour cent billets.

1. Xavier achète deux billets. Calculer la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant. (Le résultat sera donné sous forme de fraction irréductible, puis à 10^{-3} près.)
2. Xavier revient chaque jour, pendant trois jours, acheter deux billets. Quelle est la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant sur les trois jours ?
   (Le résultat sera donné à 10^{-3} près.)
3. Un autre jour, Xavier achète six billets. Quelle est la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant ?
   (Le résultat sera donné à 10^{-3} près.)

B.Soit n un entier naturel non nul.
Désormais, il est mis en vente $2n$ billets. Xavier achète deux billets.

1. Démontrer que la probabilité p_n qu'il achète au moins un billet gagnant est $p_n = \frac{3n-1}{2(2n-1)}$.
2. (a) Étudier les variations de la suite (p_n).
   (b) Déterminer la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

1. temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.

Mission Maths 360