Exercices en Terminale-Spécialité.
Continuité et dérivabilité.

Exercice 1. Calculer la dérivée de la fonction f de déterminer le domaine I de sa dérivabilité :

$$f(x) = x.\sqrt{4 - x^2}, \quad g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}, \quad h(x) = \left(\frac{2x-1}{x^2}\right)^3, \quad i(x) = \frac{(x+2)^3}{x^2+1}.$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 2, & \text{si } x \leqslant 1\,; \\ \frac{x-5}{x}, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x} \quad si \quad x \neq 0 \quad et \quad f(0) = m.$$

Quelle valeur faut-il donner à m pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$.
1. Vérifier que pour tout x, $\sqrt{1+x^2}.f'(x) = f(x)$.
2. Déduisez-en que pour tout réel x :

$$(1+x^2).f''(x) + x.f'(x) - f(x) = 0.$$

Exercice 5. Soit la fonction f définie sur $I =]2;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2}{x-2}.$$

Quelle est la plus petite valeur prise par f lorsque x varie de 3 à 5 ? Et la plus grande ?

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}$. Etudier les variations de f et dressez son tableau de variation.

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $I =]1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}.$$

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. a) Déduisez que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α telle que : $\alpha \in]1;2[$.
   b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 8. 1. Soit f la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} + 2x - 4.$$

a) Etudier sans utiliser de dérivée, les variationsde f.
b) Justifier que la fonction f s'annule exactement une fois sur I.
c) Donner un encadrement de largeur 10^{-3} de la solution.

2. a) Résoudre l'équation $\sqrt{x} + 2x - 4 = 0$.
b) Vérifier l'encadrement trouvé en 1).

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(3x).\cos^3(x).$$

1) Prouver que l'on peut restreindre létude de f à l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$.
2) Calculer la dérivée de f et justifier l'écriture :

$$f'(x) = -3.\cos^2(x).\sin(4x).$$

3) Dresser le tableau de variations de f sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations :

$$f(x) = -\frac{1}{4}, \quad et \quad f(x) = 0.$$