

## Exercices en Terminale-Spécialité. Dérivabilité.

**Exercice 1.** Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \sqrt{(1 - \cos^3(x))^3}$ .
2.  $f(x) = \tan^4(x^2 + 1)$ .
3.  $f(x) = \sin^p(x) \cdot \cos^q(x)$ .
4.  $f(x) = \sqrt{\frac{1 + \sin(\sqrt{x})}{1 - \sin(\sqrt{x})}}$ .
5.  $f(x) = \frac{1 + x^2 - x^4}{\sqrt{1 + x^2 + x^2}}$ .
6.  $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$ .

**Exercice 2.** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = |x^2 - \frac{1}{4}|$ .

On définit une suite  $(u_n)$  par la donnée de  $u_0 \in \mathbb{R}_+$  et la relation de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Représenter graphiquement  $f$ . Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $f(x) = x$ .
2. Soit l'intervalle  $I = [0, \frac{1}{4}]$ . Vérifier que  $f(I) \subset I$  et montrer que :

$$\forall x \in [0, \frac{1}{4}[ : |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

3. En déduire le comportement de la suite  $(u_n)$  (Convergence et limite) lorsque  $u_0 \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ .
4. On suppose maintenant que  $u_0 \in ]\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}[$ . Montrer qu'il existe au moins un entier naturel  $N$  pour lequel  $u_N \in I$  (On pourra faire un raisonnement par l'absurde). En déduire la convergence de la suite  $(u_n)$  et sa limite.
5. Etudier le comportement de la suite  $(u_n)$  (variations, convergence ou divergence) lorsque  $u_0 \in ]\frac{1+\sqrt{2}}{2}, +\infty[$ .

**Exercice 3.** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in [0; \frac{4}{3}]$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$ .

1. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; \frac{4}{3}]$ .
2. A l'aide des accroissements finis, montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente vers 1.

**Exercice 4.** Soient  $f$  et  $g$  définies par :  $f(x) = \cos(x)$  et  $g(x) = x \cdot \sin(x)$ , montrer que lorsque les courbes représentatives de  $f$  et  $g$  se coupent les tangentes au point d'intersection sont perpendiculaires.

**Exercice 5.** Soit  $f : [0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \sqrt{\sin(x)} + x.$$

1. Justifier que  $f$  réalise une bijection vers un intervalle  $J$  à préciser.
2. Montrer que  $f^{-1}$  est continue sur  $J$ .
3. Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$ .

**Exercice 6.** Etudier l'application :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right).$$

**Exercice 7.** Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I = [a; b]$  telle que :  $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$ .

Montrer qu'il existe  $c \in ]a; b[$  tel que :  $f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$ .

On pourra utiliser la fonction,  $\phi : x \rightarrow \phi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .