Exercices en Terminale-Spécialité.
Dérivation.

Exercice 1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 4.$$

1. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = -4$.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Donner en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -12$.
4. Existe-t-il un réel y tel que l'équation $f(x) = y$ n'ait aucune solution ?

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 5}{(x+1)^2}.$$

1. Démontrer qu'il existe une fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ telle que :
   $$f(x) = x + 1 + g(x)$$
   et que $g(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
2. (a) Vérifier que : $(x-1)(x^2 + 4x + 5) = x^3 + 3x^2 + x - 5$.
   (b) Cacluler la dérivée de la fonction f et étudier son signe en utilisant a..
   (c) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition, puis dresser le tableau de variations de f.
3. Tracer l'allure de la courbe (C) de la fonction dans le plan muni d'un repére orthonormé.

Exercice 3. Soit g la fonction définie sur $[-2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 2x + 4}.$$

1. Justifier que les équations $g(x) = 0$, $g(x) = 5$ et $g(x) = 3$ ont une solution et une seule.
2. Résoudre les équations $g(x) = 0$, $g(x) = 5$ et $g(x) = 2$ lorsque les solutions ne sont pas entières, on indiquera une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice 4. Soit P un polyôme du troisième degré.

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad avec \quad d \neq 0.$$

1. Démontrer que $P(x)$ s'annule au moins une fois $\mathbb{R}$.
2. On pose $P(x) = x^3 - x^2 + x + 2$.
   On admettra que P est strictement croissant sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que $P(x)$ s'annule exactement une fois et donner un encadrement de largeur 10^{-2} de la solution.

Exercice 5. f est la fonction définie sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{2x-1}.$$

(C) est sa croube représentative dans un repére.
Démontrer qu'il existe une droite et une seule qui est tangente à (C) et qui passe par l'origine.

Exercice 6. Soit deux mobiles M et N se déplacant sur une mêùme droite munie d'un repère selon les lois respectives :

$$u(t) = 2t+3 \quad et \quad v(t) = t^2 + 2t - 1.$$

1. A quels instants les deux mobiles se rencontrent-ils ?
2. A chacun de ces instants, déterminer la vitesse et l'accélération des deux mobiles.
3. Que peut-on dire du mouvement du mobile M ? Du mobile N ? justifier chaque réponse.

Exercice 7. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1, 5\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-3}.$$

1. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C représentative de f au point d'abcisse 1.
2. Existe-t-il un autre point de la courbe (C) pour lequel la tangente à (C) est paralléle à T ? Si oui, déterminer ses coordonnées et une équation de cette seconde tangente.

Exercice 8. f est la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

1. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, $n \geqslant 1$, la fonction f est dérivable n fois et pour tout x de $]-1; +\infty[$: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n.n!}{(x+1)^{n+1}}$.
2. Déterminer suivant les valeurs de n, les variations de la fonction $f^{(n)}$ sur $]-1; +\infty[$.

Exercice 9. f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Expliquer pourquoi : $1 < \alpha < 2$.