Exercices en Terminale-Spécialité.
Intégrales, ln et expo.

Exercice 1. .

But de l'exercice : approcher $\ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Soit $a \in [0\ ;\ +\infty[$.

On note $I_0(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculez $I_0(a)$ en fonction de a.

2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a

3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$.
Démontrez en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$.

5. Soit $J(a) = \displaystyle\int_0^a (t-a)^5\,\mathrm{d}t$. Calculez $J(a)$.

6. a. Démontrez que pour tout $t \in [0\ ;\ a]$, $\dfrac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geqslant (t-a)^5$.

b. Démontrez que pour tout $a \in [0\ ;\ +\infty[$, $J(a) \leqslant I_5(a) \leqslant 0$.

7. En déduire que pour tout $a \in [0\ ;\ +\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leqslant \dfrac{a^6}{6}$.

8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

Exercice 2. .

1. Etablir que pour tout réel x, on a $e^x - x \geqslant \dfrac{e^x}{2}$.

   Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_0^n \varphi(x)\ dx$.
2. (a) Déterminer soigneusement les limites de φ aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) Etudier les variations de φ puis dresser son tableau de variations complet.
3. Donner une interprétation géométrique de (u_n).
4. Etudier les variations de (u_n).
5. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2xe^{-x}\ dx$.
   (b) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\displaystyle\int_0^n 2xe^{-x}\ dx$ en fonction de n.
   (c) En déduire que (u_n) est majorée par 2. Que peut-on en conclure concernant (u_n) ?

Mission Maths 360