Exercices en Terminale-Spécialité.
Primitives et calcul intégral.

Exercice 1. Prouver, dans chaque cas, que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiqué.
1) $I =]0; +\infty[$, $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{x} + 1$; $F(x) = (x-1).\ln(x)$.
2) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1).e^{1-x}$; $F(x) = -xe^{1-x}$.
3) $I = [0; 2.\pi]$, $f(x) = \sin(x).\cos(x)$, $F(x) = \frac{1}{4}.\cos(2.x + \pi)$.

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I donné :

1) $f(x) = 2x(x^2+1)^2$, $I = \mathbb{R}$; 2) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $I =]-1; 1[$; 3) $f(x) = \cos(2x - \dfrac{\pi}{4})$, $I = \mathbb{R}$.

4) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^2(x)}$, $I =]1; +\infty[$; 5) $f(x) = e^{\sin(x)}.\cos(x)$, $I = \mathbb{R}$; 6) $f(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^4}$, $I = \mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et C_f sa représentation graphique dans une repère orthonormé du plan.

1. Quel est le domaine de définition D_f de f ?
2. a. Représenter graphiquement f sur D_f et conjecturer la nature géométrique de C_f.
   b. Soit $M(x_M; y_M)$ un point du plan. Démontrer que $M \in C_f$ si et seulement si $OM = 1$ et $x_M \in D_f$.
   c. En déduire la nature exacte de C_f.
3. On considère : $I = \int_{-1}^{1} f(x)\ dx$.
   (a) Pourquoi cette intégrale est-elle bien définie ?
   (b) Déduire des questions précedentes la valeur de I.

Exercice 4. On considère l'intégrale $I = \int_1^a \ln(x)\ dx$, où a est un réel tel que : $a \geqslant 1$.

1. (a) Tracer le domaine du plan dont la surface est I et compléter avec la courbe de la fonction exponentielle.
   (b) Dans un repère orthonormé, rappeler la transformation géométrique permettant de passer de la courbe de la fonction logarithme népérien à la courbe de la fonction exponentielle, et réciproquement.
2. (a) Par des considérations géométriques, démonter que :
$$I = a.\ln(a) - \int_0^{\ln(a)} e^a\ dx.$$
   (b) COnclure à la valeur de I.
3. Plus généralement, soient a et b deux réels tel que $1 \leqslant a < b$. En tenant un raisonnement analogque démonter que :
$$\int_a^b \ln(x)\ dx = b\ln(b) - a\ln(a) - b + a.$$

Exercice 5. Soient ϕ et ψ les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\phi(x) = \int_0^x t^2 e^t \, dt \quad et \quad \psi(x) = (x^2 - 2.x + 2).e^x.$$

1. (a) Démonter que ϕ et ψ sont deux primitives sur $\mathbb{R}^+$ d'une même fonction f que l'on précisera.
   (b) En déduire la relation qu'il existe entre ϕ et ψ.
2. Déterminer la primitive F de f telle que : $a)$ $F(0) = 0$ $\quad$ $b)$ $F(1) = 0$.

Exercice 6. Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes :

$$1)\ I = \int_{-1}^{4} (x-1)^2 \, dx, \quad 2)\ J = \int_1^2 \frac{1}{(2x-1)^2} \, dx, \quad 3)\ K = \int_0^{\pi} e^{\cos(t)} \sin(t) \, dt.$$

$$4)\ L = \int_{-4}^{-3} \frac{x+1}{(x^2+2x)^2} \, dx, \quad 5)\ M = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \, dx, \quad 6)\ N = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} \, dx.$$

Exercice 7. On considère les deux intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+2} \, dx \quad et \quad J = \int_0^1 \frac{1}{e^x+2}.$$

En calculant $I + j$ et $I - J$ déduire les valeurs de I et J.

Exercice 8. Soit f la fonction définie sur $I = [-1; 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0\,; \\ \frac{1}{x+1}, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Calculer l'intégrale de f sur I.

Exercice 9. Soient f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{x^2}{2}$ et $g(x) = \frac{8}{x+2}$ et D le domaine compris entre les courbes C_f et C_g, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = a$. Déterminer l'aire du domaine D lorsque $a \leqslant 2$ et lorsque $a \geqslant 2$.

Exercice 10. Soit $(u_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^n \frac{1}{e^{x\ln(2)}} \, dx.$$

1. Calculer u_n en fonction de n.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter géométriquement. En quoi est-ce surprenant ?

Exercice 11. Soit (I_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 0$ par :

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) \, dx.$$

1. (a) Déterminer le sens de variations de la suite (I_n).
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant I_n \leqslant \ln(2)$.
   (c) Que peut-on dire de la suite (I_n).
2. soit $f : x \mapsto f(x) = \ln(1+x) - x$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Etudier le signe de f.
   (b) Déterminer la limite de la suite (I_n).