

Exercices en Terminale-Spécialité.

Limites, continuité et TVI.

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}.$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sin(x)}{3x + 1}.$$

Exercice 2. On définit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1}}{x}.$$

1. Prouver que pour tout réel $x \geq 0$: $4x^2 \leq 4x^2 + x + 1 \leq (2x + 1)^2$.
2. En déduire que pour tout réel $x > 0$: $2 \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x}$.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 3. f est définie par :

$$f(x) = \frac{x \cdot \sin(1/x)}{x^2 + 5}.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calculer, si possible : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [-3; 3]$ par :

$$f(x) = x^3 - 12x.$$

1. Justifier la continuité de f sur I .
2. Démontrer que pour tout nombre réel λ tel que : $-9 \leq \lambda \leq 9$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans l'intervalle I .

Exercice 5. Démontrer que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ admet une solution α unique sur $[0; 1]$ et donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près par défaut.