Exercices en Terminale-Spécialité.
Limites de suites.

Exercice 1. Répondre par VRAI ou FAUX aux propositions suivantes en justifiant :

1. Si une suite est croissante, alors elle tend vers $+\infty$.
2. Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle est croissante.

Exercice 2. Déterminer en justifiant avec la définition les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6n+2}{2n+1}, \quad \lim_{n\to+\infty} 6+\frac{5}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 3. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} n-\sqrt{n}, \quad \lim_{n\to+\infty} 3^n-2^n, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n-3^n}{5^n+2^n}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(1)^n n^2}{(-0.2)^n}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-8n^3+6n^2-3n+17}{2n^2+3n+6}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}-2n+1}{n+1}, \quad \lim_{n\to+\infty} -5n^4+2n^4\sin(\sqrt{n}).$$

Exercice 4. La suite (u_n) est définie par : $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$.

1. Démontrer que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Prouver que la suite (u_n) est strictement croissante.
3. Quel est le comportement de la suite en $+\infty$? Justifier votre réponse.

Exercice 5. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par :

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n \leqslant 2-\frac{1}{n}.$$

   (b) Que pouvez-vous déduire pour la suite (u_n) ?

Exercice 6. Soit un réel $x \geqslant 0$ et un entier $k > x$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant k$: $\frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant k$: $\frac{x^n}{n!} \leqslant \left(\frac{x}{k}\right)^n . \frac{k^k}{k!}$.
3. Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

Exercice 7. On considére la suite :$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \sqrt{n+1}$.
2. Conclure que : $u_n \geqslant \sqrt{n}$.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 8. Soit la suite : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^* : \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
2. En utilisant la question précédente déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 9. On considére la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(u_n + \sqrt{u_n} + 2\Big).$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}: \quad 1 \leqslant u_n \leqslant 4$.
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad 0 < 4 - u_{n+1} < \frac{2}{3}\Big(4 - u_n\Big).$$
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.