Exercices en Terminale-Spécialité.
Raisonnement par récurrence.

Exercice 1. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a l'inégalité :

$$1! + 2! + 3! + ... + (n-1)! \leqslant n!.$$

Exercice 2. Soit la suite u définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. Démontrer que la suite u est minorée par 1 et est décroissante.

Exercice 3. Soit la suite u définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier n :

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{4x - 2}{x + 1}.$$
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n > 2$.
3. La suite u est-elle monotone ?

Exercice 4. On considère la suite u définie par : $u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1}.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier n :

$$u_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Exercice 5. Démontrer que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

Exercice 6. La suite (u_n) est définie par $u_0 \in]0; 1[$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 < u_n < 1.$$

Exercice 7. Démontrer que :

$$\forall a > -1, \forall n \in \mathbb{N} : \quad (1 + a)^n \geqslant 1 + na.$$

Exercice 8. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0; 1; 2\} : \quad (1 + \frac{1}{n})^n < n.$$

Exercice 9. Pour tout entier naturel n, soit la propriété $P(n)$ suivante :

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

1. Vérifier que cette proriété est héréditaire.
2. Cette propriété est-elle vraie pour tout entier n ?

Mission Maths 360

3. Existe-t-il es valeurs de n pour lesquellles cette propriété est vraie ?

Exercice 10. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k.k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}.$$

Exercice 11. Soit a, b deux nombres réels, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que :

$$a^n - b^n = (a-b).\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}.b^k.$$

Mission Maths 360