# Exercices en Terminale-Spécialité.
# Raisonnement par récurrence bis.

---

**Exercice 1.** Pour tout entier naturel $n$, soit la propriété $P(n)$ suivante :

$$1+2+3+...+n=\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2.$$

1. Vérifier que cette proriété est héréditaire.
2. Cette propriété est-elle vraie pour tout entier $n$ ?
3. Existe-t-il es valeurs de $n$ pour lesquellles cette propriété est vraie ?

**Exercice 2.** On considère la suite définie par :

$$u_0=2 \quad et \quad u_n=\frac{1}{5}u_{n-1}+\frac{1}{2}, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Montrer que :

$$u_n=\frac{11}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{5}{8} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

**Exercice 3.** On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$u_0=0, et\ u_n=-\frac{1}{3}w_{n-1}+4 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Montrer par récurrence que :

$$2\leqslant u_n\leqslant 5, \ \forall n\geqslant 0.$$

**Exercice 4.** Montrer par récurrence que pour tout $n\geqslant 1$ :

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Exercice 5.** Pour tout entier $n\geqslant 1$, on définit $n!$ qui se lit "n factoriel" ou "factorielle n" par :

$$1!=1; \ 2!=1\times 2=2; \ 3!=1\times 2\times 3=6; etc.$$

1. Calculer 6!.
2. Montrer par récurrence que : $3^n\leqslant n!$ pour tout $n\geqslant 7$.
3. Montrer que : $n!\leqslant n^n$ pour tout $n\geqslant 1$.

**Exercice 6.** Montrer par récurrence que $4^n-1$ est un multiple de 3 pour tout $n\geqslant 0$.

**Exercice 7.** Montrer par récurrence que pour tout entier $n\geqslant 2$, on a l'inégalité :

$$1!+2!+3!+...+(n-1)!\leqslant n!.$$

**Exercice 8.** Soit la suite $u$ définie par $u_0=8$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$. Démontrer que la suite $u$ est minorée par 1 et est décroissante.

**Exercice 9.** Soit la suite $u$ définie par $u_0=3$ et pour tout entier $n$ :

$$u_{n+1}=\frac{4u_n-2}{u_n+1}.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ définie sur $]-1;+\infty[$ par :
$$f(x)=\frac{4x-2}{x+1}.$$
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n$, $u_n > 2$.
3. La suite $u$ est-elle monotone ?

**Exercice 10.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7.

**Exercice 11.** Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}-\{0;1;2\}: \quad (1+\frac{1}{n})^n < n.$$

**Exercice 12.** Soit $(u_n)$ la suite définie par :
$$u_2=3, et\ \forall n \geqslant 2: \quad u_{n+1}=\frac{3u_n+1}{u_n+3}.$$
Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ , $u_n=\frac{2^n+2}{2^n-2}$.

**Exercice 13.** Soit la suite $(v_n)$ définie par :
$$v_0=\frac{7}{8}, et\ \forall n \in \mathbb{N}: \ v_{n+1}=v_n^2.$$
Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}.$$

**Exercice 14.** Soit la suite $(u_n)$ définie par :
$$u_0=0, \ et\ u_{n+1}=3u_n-2n+3, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant n$.

**Exercice 15.** Soit la suite définie par :
$$u_0=\frac{2}{3}, \ et\ u_{n+1}=u_n(2-u_n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0<u_n<1$.
**Ind :** On pourra étudier : $f(x)=x(2-x)$ sur $[0;1]$.

**Exercice 16.** Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \quad 1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

**Exercice 17.** Soit la suite $(u_n)$ définie par :
$$u_0=1, et\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$$
.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0<u_n<2$.
b) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

**Exercice 18.** Soit la suite définie par :
$$u_0=2, et\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}=1+\frac{1}{u_n}.$$
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.