

## Exercices en Terminale-Spécialité.

### Exponentielle en terminale.

**Exercice 1.** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 1)e^x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - e^x}{x^2 + x + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

$$e^{2x^2+3} = e^{7x}, \quad e^{2x+1} \leq e^{\frac{3}{x}}, \quad e^x + e^{-x} - 2 \geq 0.$$

**Exercice 2.** Calculer la dérivée de la fonction  $f$  proposée en indiquant l'intervalle de dérivation :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}, \quad g(x) = \frac{1}{x} \cdot e^x, \quad h(x) = x + 2 - \frac{2e^x}{e^x + 1}, \quad k(x) = e^{1-x}(x^2 + 2x).$$

**Exercice 3.** Soit  $(u_n)$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = e^{-\frac{n}{2}}.$$

1. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est géométrique.
2. On pose pour tout entier  $n$  :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

- (a) Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .
- (b) Quelle est la limite de  $S_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 4.** Etudier et représenter la fonction suivante :

$$f(x) = xe^{\sqrt{x}} - x.$$

**Exercice 5.** Etudier et représenter la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x}.$$

**Exercice 6.** Pour tout nombre réel  $x$  on pose :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Démontrer que pour tout réel  $x$  :

$$[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1.$$

2. Démontrer que pour tout réel  $x$  :

$$g(2x) = 2f(x)g(x).$$

3. Démontrer que pour tout réel  $x$  :

$$f(2x) = 2[g(x)]^2 - 1.$$

4. Démontrer que :  $f' = g$  et  $g' = f$ .

**Exercice 7.** 1. (a) Justifier que pour tout nombre réel  $x$  :  $1 + x \leq e^x$ . (1)

(b) Déduisez-en que pour tout réel  $x$ ,  $e^{-x} - 1 + x \geq 0$ .

2. Démontrer que pour tout  $x < 1$ ,  $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ . (2)

3. (a) A partir de l'inégalité (1), démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$

(b) De même à partir de l'inégalité (2), démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

4. On définit la suite  $(u_n)$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

(a) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{n}{n+1} \cdot e \leq u_n \leq e.$$

(b) Déduisez-en que la suite  $(u_n)$  converge vers  $e$ .