

## Exercices en Terminale-Spécialité.

### Suites et dénombrement.

**Exercice 1.** Soit la suite  $(u_n)_n$  définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{n+1}{3}u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{n!}{3^n}$ .

**Exercice 2.** Soit  $n$  un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n)!}{4^n \cdot (n!)^2}.$$

En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* : (2n)! < 4^n \cdot (n!)^2$ .

**Exercice 3.** Soit  $p, q, n \in \mathbb{N}$  tels que :  $n \leq p + q$ .

1. En utilisant l'identité :  $(1+x)^p \cdot (1+x)^q = (1+x)^{p+q}$  montrer que :

$$\sum_{k=0}^n C_p^k \cdot C_{p+q}^n = C_{p+q}^n.$$

2. En déduire que :  $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$ .

**Exercice 4.** On considère une urne contenant  $n$  boules blanches et  $n$  boules noires. On tire au hasard et simultanément  $n$  boules de l'urne.

1. Quel est le nombre de tirages ?
2. Déterminer le nombre de tirages dans chacun des deux cas suivants :
  - (a) Toutes les boules tirées sont noires.
  - (b) Tirer au moins une boule blanche.
3. Conclure que :  $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$ .

**Exercice 5.** Dans une classe composée de 40 élèves, un professeur a effectué un sondage sur les matières préférées des élèves, les résultats étaient classés comme suit : 18 élèves préféraient les Mathématiques, 16 le Français et 14 n'aimaient aucune de ces deux matières.

1. Déterminer le nombre des élèves qui s'intéressent aux Mathématiques ou le Français.
2. Déterminer le nombre des élèves qui s'intéressent aux Mathématiques et le Français.
3. Déterminer le nombre des élèves qui s'intéressent aux Mathématiques et non au Français.
4. Déterminer le nombre des élèves qui s'intéressent au Français et non aux Mathématiques.

**Exercice 6.** Une urne  $U_1$  contient 4 boules rouges et 3 boules vertes et une urne  $U_2$  contient 5 boules rouges, 2 boules verts et une boule jaune.

On tire simultanément deux boules de l'urne  $U_1$  et une boule de l'urne  $U_2$ .

1. Quel le nombre de tous les tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de possibilités dans chacun des cas suivants ?
  - (a) Tirage de 3 boules rouges.
  - (b) Tirage d'une seule boule verte.
  - (c) Tirage de deux boules verts et une boule jaune.
  - (d) Tirage d'une boule de chaque couleur.

**Exercice 7.** Une urne contient 5 boules blanches, 4 boules noires et 3 boules rouges, on tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages possibles dans les cas suivants ?
  - (a) Tirage de 3 boules de même couleurs.
  - (b) Tirage d'une boule de chaque couleur.
  - (c) Tirage d'au plus une boule noire.
  - (d) Reprenez ces trois dernières questions en supposant que le tirage des 3 boules se fait successivement avec remise, puis sans remise.