Exercices en Terminale-Spécialité.
Suites et probabilités.

Exercice 1. .

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence :
$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}.$$
   (a) Soit la suite (v_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{5}$; montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.
2. On considère deux dés, notés A et B. Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.
   On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc, on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite.
   On désigne
   — par A_n l'événement « on utilise le dé A au $n^{\text{ième}}$ lancer » ;
   — par $\overline{A_n}$ l'événement contraire de A_n,
   — par R_n l'événement « on obtient rouge au $n^{\text{ième}}$ lancer »,
   — par $\overline{R_n}$ l'événement contraire de R_n,
   — par a_n et r_n les probabilités respectives de A_n et R_n.
   (a) Déterminer a_1.
   (b) Déterminer r_1. Pour cela, on pourra s'aider d'un arbre.
   (c) En remarquant que, pour tout $n \geqslant 1$, $R_n = (R_n \cap R_n) \cup \left(R_n \cap \overline{R_n}\right)$, montrer que $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$.
   (d) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,
   $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup \left(\overline{A_n} \cap \overline{R_n}\right)$.
   (e) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,
   $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$, puis déterminer l'expression de a_n en fonction de n.
   (f) En déduire l'expression de r_n en fonction de n puis la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2. Une boîte contient 60 boules blanches et 40 boules noires. On effectue dans cette boîte des tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage. On s'arrêtera à l'obtention d'une boule blanche.

1. Dans cette question, on ira au maximum à 4 tirages. On appellera X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche. Par convention, X sera égal à 0 si l'on n'obtient pas de boule blanche après les 4 tirages.
   (a) Calculer la probabilité pour que X soit égal à 0.
   (b) Calculer la probabilité pour que X soit égal à k, k valant successivement 1, 2, 3 et 4.
2. Dans cette question, on procédera à n tirages au maximum, n étant un entier naturel non nul. De même on appellera X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche et ici encore X sera nul si l'on n'obtient pas de boule blanche après n tirages.

Mission Maths 360

(a) Calculer la probabilité pour que X soit égal à k, k étant un entier naturel variant de 1 à n.

(b) On considère le polynôme P tel que $P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$.

Soit $E(X)$ l'espérance de la variable aléatoire X. Montrer que $E(X) = \frac{3}{5}P\left(\frac{2}{5}\right)$.

(c) On rappelle que pour tout réel x différent de 1, on a $1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

En dérivant les deux termes de l'égalité précédente, déterminer une autre expression de $P(x)$ et en déduire que $E(X) = \frac{5}{3} - \left(n + \frac{5}{3}\right) \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Mission Maths 360