# Astuce Bac :

## Calcul de limite à l'aide du nombre dérivé ?

**Définition :**
$f$ est dérivable en $a$ lorsque le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $a$ et dans ce cas on a :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

**Exercice :**
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^n-1}{x}.$$

**Solution :**

**Calcul de la limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ :**

Un calcul direct de la limite donne une forme indéterminée, je ne vois pas comment enlever la forme indéterminée ?

En posant $f(x) = \sin(x)$ on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

***https://missionmaths360.com/***

On sait que la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sin'(x) = \cos(x)$.

En utilisant la définition du nombre dérivé on a alors :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \cos(0) = 1.$$

Ainsi : $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$

**Calcul de la limite $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ :**

En posant : $g(x) = e^x$, on a : $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0) = e^0 = 1.$

Ainsi : $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1}$

**Calcul de la limite $\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^n-1}{x}$ :**

En posant : $h(x) = (x+1)^n$, on a :

$h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \; h'x() = n(x+1)^{n-1}$. Par conséquent :

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^n-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = h'(0) = n.$$

Ainsi : $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^n-1}{x} = n}$