Lycée ALJABR

Maths-Expertes G1.

Corrigé du devoir surveillé 01

Exercice 1. .

$$z_1 = \frac{-2+i}{3+i} = \frac{(-2+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{-6+1+2i+3i}{9+1} = \frac{-5+5i}{10} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

$$z_2 = \frac{7+i}{3-2i} = \frac{(7+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{21-2+14i+3i}{9+4} = \frac{19+17i}{13} = \frac{19}{13}+\frac{17}{13}i.$$

$$z_3 = \frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2-2+i+4i}{1+4} = \frac{5i}{5} = i.$$

Exercice 2. .

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : (z_1+z_2)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k . z_2^{n-k}.$
2. $(2x-3y)^4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (2x)^k.(-3y)^{4-k}$
$= \binom{4}{0}(-3y)^4 + \binom{4}{1}(2x)(-3y)^3 + \binom{4}{2}(2x)^2(-3y)^2 + \binom{4}{3}(2x)^3(-3y) + \binom{4}{4}(2x)^4$
$= 81y^4 - 216xy^3 + 216x^2y^2 - 96x^3y + 16x^4.$
3. $(2x-3y)^7 = \displaystyle\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} (2x)^k.(-3y)^{7-k}$ *le coefficient de* x^4y^3 *est* $-15120.$

Exercice 3. .

On pose $z = x+iy$ *avec* $x, y \in \mathbb{R}$.

$(E) \Leftrightarrow (x+iy)^2-(x-iy)-1=0 \Leftrightarrow (x^2-y^2-x-1)+iy(2x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} (y=0 \text{ ou } x=-\frac{1}{2}) \\ x^2-y^2-x-1=0 \end{cases}$

Si $y=0$ *on trouve :* $x^2-x-1=0$ *et donc* $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ *ou* $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *(Passer par* Δ*).*

On en déduit que les complexes $z_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ *et* $z_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *sont solutions de* (E).

Si $x=-\dfrac{1}{2}$ *on trouve :* $y^2=-\dfrac{1}{4}$ *ce qui est impossible vu que* y *est réel !*

Conclusion : $S=\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\}.$

Octobre 2024, abd.Elakili

Exercice 4. .

1. *Posons :* $z = iy$ *avec* $y \in \mathbb{R}$.
   On a : $P(iy) = 0$
   $\Leftrightarrow (iy)^3 - (1+i\sqrt{3})(iy)^2 + (1+i\sqrt{3})(iy) - i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow -iy^3 + y^2 + i\sqrt{3}y^2 + iy - \sqrt{3}y - i\sqrt{3} = 0$
   $\Leftrightarrow (y^2 - \sqrt{3}y) + i(-y^3 + \sqrt{3}y^2 + y - \sqrt{3}) = 0$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} y(y-\sqrt{3}) = 0 \\ -y^3 + \sqrt{3}y^2 + y - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y = 0 \text{ ou } y = \sqrt{3}) \\ -y^3 + \sqrt{3}y^2 + y - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$
   Si $y = 0$ *on trouve* $-\sqrt{3} = 0$ *impossible.*
   Si $y = \sqrt{3}$ *on trouve :* $-3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$ *ce qui est vraie.*
   Conclusion : $z = i\sqrt{3}$ *est l'unique solution imaginaire pure de l'équation :* $P(z) = 0$.
2. $P(z) = z^2(z - i\sqrt{3}) + i\sqrt{3}z^2 - z^2 - i\sqrt{3}z^2 + (1+i\sqrt{3})z - i\sqrt{3}$
   $= z^2(z - i\sqrt{3}) - z(z - i\sqrt{3}) + z - i\sqrt{3} = (z - i\sqrt{3})(z^2 - z + 1)$.

3. $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = i\sqrt{3}$ *ou* $z^2 - z + 1 = 0$.
   Résolvons : $z^2 - z + 1 = 0$, *on a* $\Delta = -3$ *donc les solutions sont :* $z_1 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ *et* $z_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.
   Conclusion : $S = \{i\sqrt{3}; \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\}$.

Fin de l'épreuve.