Lycée ALJABR

Maths-Expertes G4.

Corrigé du devoir surveillé 01

Exercice 1. .

$$z_1 = \frac{-3+i}{2+i} = \frac{(-3+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{-6+1+5i}{4+1} = \frac{-5+5i}{5} = -1+i.$$

$$z_2 = \frac{7-i}{2-3i} = \frac{(7-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{14+3+19i}{4+9} = \frac{17}{13} + \frac{19}{13}i.$$

$$z_3 = \frac{2-i}{1+2i} = \frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2-2-5i}{1+4} = -i.$$

Exercice 2. .

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : (z_1+z_2)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k . z_2^{n-k}.$
2. $(3x-2y)^4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (3x)^k . (-2y)^{4-k}$
$= \binom{4}{0}(-2y)^4 + \binom{4}{1}(3x)(-2y)^3 + \binom{4}{2}(3x)^2(-2y)^2 + \binom{4}{3}(3x)^3(-2y) + \binom{4}{4}(3x)^4$
$= 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4.$
3. $(3x-2y)^7 = \displaystyle\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} (3x)^k . (-2y)^{7-k}$ *le coefficient de* x^4y^3 *est* -22680.

Exercice 3. .

On pose $z = x+iy$ *avec* $x, y \in \mathbb{R}$.

$(E) \Leftrightarrow (x+iy)^2 + (x-iy) + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2-y^2+x+1) + iy(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (y=0 \text{ ou } x = \frac{1}{2}) \\ x^2-y^2+x+1 = 0 \end{cases}$

Si $y=0$ *on trouve :* $x^2+x+1=0$ *on a :* $\Delta = -3 < 0$ *et* x *réel donc pas de solutions.*

Si $x = \frac{1}{2}$ *on trouve :* $y^2 = \frac{7}{4}$ *ainsi :* $y = -\frac{\sqrt{7}}{2}$ *ou* $y = +\frac{\sqrt{7}}{2}$

On en déduit alors que les complexes : $z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$ *et* $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$ *sont solutions de* (E).

Conclusion : $S = \{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}\}$.

Octobre 2024, abd.Elakili

Exercice 4. .

1. *Posons :* $z = iy$ *avec* $y \in \mathbb{R}$.
   On a : $P(iy) = 0$
   $\Leftrightarrow (iy)^3 + (1+i\sqrt{3})(iy)^2 + (1+i\sqrt{3})(iy) + i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow -iy^3 - y^2 - i\sqrt{3}y^2 + iy - \sqrt{3}y + i\sqrt{3} = 0$
   $\Leftrightarrow -(y^2 + \sqrt{3}y) + i(-y^3 - \sqrt{3}y^2 + y + \sqrt{3}) = 0$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} y(y+\sqrt{3}) = 0 \\ -y^3 - \sqrt{3}y^2 + y + \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y = 0 \text{ ou } y = -\sqrt{3}) \\ -y^3 - \sqrt{3}y^2 + y + \sqrt{3} = 0 \end{cases}$
   Si $y = 0$ *on trouve* $\sqrt{3} = 0$ *impossible.*
   Si $y = -\sqrt{3}$ *on trouve :* $3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$ *ce qui est vraie.*
   Conclusion : $z = -i\sqrt{3}$ *est l'unique solution imaginaire pure de l'équation :* $P(z) = 0$.
2. $P(z) = z^2(z + i\sqrt{3}) - i\sqrt{3}z^2 + z^2 + i\sqrt{3}z^2 + (1 + i\sqrt{3})z + i\sqrt{3}$
   $= z^2(z + i\sqrt{3}) + z(z + i\sqrt{3}) + z + i\sqrt{3} = (z + i\sqrt{3})(z^2 + z + 1)$.

3. $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -i\sqrt{3}$ *ou* $z^2 + z + 1 = 0$.
   Résolvons : $z^2 + z + 1 = 0$, *on a* $\Delta = -3$ *donc les solutions sont :* $z_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ *et* $z_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.
   Conclusion : $S = \{-i\sqrt{3}; \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}; \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\}$.