Lycée ALJABR
Maths-Expertes G1+G4.
Feuille d'exercices 02

Exercice 1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :*

$$f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i.$$

1. *Vérifier que pour tout nombre complexe z, $f(z) = (z-2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$.*
2. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :$f(z) = 0$.*

Exercice 2.
1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \overline{z} + \dfrac{1}{4} = 0$.*
2. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 3\overline{z} + 2 = 0$.*
3. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 + 4z^2 - 21 = 0$.*

Exercice 3. *On considère le polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3$.*

1. *Montrer qu'il existe un polynôme Q à coéfficients réels tel que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z^2+1)Q(z)$.*
2. *En déduire toutes les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme P.*

Exercice 4. *Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i$.*

1. *Calculer $P(i)$.*
2. *Trouver deux nombres réels p et q tels que : $P(z) = (z-i)(z^2 + pz + q)$.*
3. *Résoudre : $P(z) = 0$.*

Exercice 5.
1. *Dans $\mathbb{C}$ on considère le polynôme : $z^2 + 6z + 25$, déteminer ses racines.*
2. *Donner l'écriture algèbrique du nombre complexe a et b définis par :*

$$a = (1+2i)^2; \qquad b = (1-2i)^2.$$

3. *En déduire les solutions de l'équation :*

$$z^4 + 6z^2 + 25 = 0.$$

Exercice 6. *On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :*

$$(E) \quad z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0.$$

1. *Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive :*

$$(E) \quad (z-2)(z^2 + az + b) = 0.$$

2. *Résoudre l'équation (E).*

Septembre 2024, abd.Elakili