Exercices sur les nombres complexes

Exercice 1. On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = 2 - 3\mathrm{i}$.
Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$a)$ $z_3 = z_1 + z_2$; $b)$ $z_4 = z_1 z_2$; $c)$ $z_5 = \dfrac{1}{z_1}$; $d)$ $z_6 = \dfrac{z_1}{z_2}$

$e)$ $z_7 = \overline{z_1}$; $f)$ $z_8 = \overline{z_1 - z_2}$; $g)$ $z_9 = \dfrac{1}{\overline{z_2}}$: $h)$ $z_{10} = \dfrac{z_2}{z_1}$.

Exercice 2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que $z - \overline{z}(\mathrm{i}z + 1)$ est un imaginaire pur.

Exercice 3. Démonter que, si z est un imaginaire pur et si n est un entier naturel impair, alors z^n est également un imaginaire pur.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z_n = (2 - 2\mathrm{i})^{4n}$. Déterminer $\mathrm{Re}(z_n)$ et $\mathrm{Im}(z_n)$.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(\mathrm{i}z + 1)(z - 1 + 3\mathrm{i}) = 0$.
Même question avec (F) : $(\mathrm{i}z - 1)(\overline{z} + 1 - 3\mathrm{i}) = 0$.

Exercice 6. Pour tout complexe z, on pose $Z = z - 2\overline{z} + \mathrm{i}$.

1. Calculer Z dans les cas suivants : $z = 0$; $z = \mathrm{i}$ puis $z = 1 - \mathrm{i}$.
2. On écrit z sous forme algébrique $z = x + \mathrm{i}\,y$. Déterminer la forme algébrique de Z en fonction de x et y.
3. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $Z = 1 - \mathrm{i}$.
4. En déduire que Z est imaginaire pur si et seulement si z imaginaire pur.

Exercice 7. À tout nombre complexe z différent de i, on associe le nombre complexe Z défini par

$$Z = \frac{z - 1 + 2\,\mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}.$$

1. Calculer la valeur de Z en prenant $z = 1 - \mathrm{i}$. (On donnera le résultat sous forme algébrique.)
2. Dans toute cette question z est un complexe quelconque différent de i. On pose $z = x + \mathrm{i}\,y$ et $Z = X + \mathrm{i}\,Y$ où x, y, X et Y sont des nombres réels.
   a. Montrer que $X = \dfrac{x^2 - x + y^2 + y - 2}{x^2 + (y-1)^2}$ et $Y = \dfrac{3x + y - 1}{x^2 + (y-1)^2}$.
   b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
   c. Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.