Fiche 01 de révision !

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 3z + 3 = 0$

2°) a) Soit : $P(z) = z^3 - (3 + i\sqrt{3})z^2 + 3(1 + i\sqrt{3})z - 3i\sqrt{3} = 0$

Déterminer un nombre imaginaire pur solution de l'équation $P(z) = 0$.

b) En déduire une factorisation de $P(z)$ puis toutes les solutions de l'équation : $P(z) = 0$.

On donnera ces solutions sous forme algébrique .

Exercice 2

I/ Soit (E) l'équation : $z^2 - (1 + 2i)\, z - 2\,(1 - 2i) = 0$

1°) Démontrer que (E) possède une solution réelle.

2°) En déduire toutes les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3

Soit $P(z) = z^3 - (6 + 5i)z^2 + (25 + 30i)z - 125i$.

1°) Démontrer que $P(z)$ admet une unique racine imaginaire pure que l'on déterminera.

2°) Déterminer trois réels a, b et c tels que $P(z) = (z - 5i)(az^2 + bz + c)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

3°) En déduire toutes les solutions de l'équation : $P(z) = 0$.

Exercice 4

On considère le polynôme $P(z)$ de la variable complexe z :

$$P(z) = z^3 + 2(1 - i)\, z^2 + 2(1 - 2i)\, z - 4i.$$

a) Calculer $P(i)$ et $P(\sqrt{2})$.
b) Déterminer le réel y tel que iy soit solution de l'équation $P(z) = 0$.
c) En déduire une factorisation de $P(z)$.
d) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes : $P(z) = 0$.

Exercice 5

Soit (E) l'équation complexe : $iz^2 - 2\,\overline{z} + 2 - i = 0$.

1°) On pose : $z = x + iy$ avec x et y réels, démontrer que (E) équivaut au système : $\begin{cases} x + xy - 1 = 0 \\ x^2 - (y - 1)^2 = 0 \end{cases}$

2°) En déduire la résolution de l'équation (E).