Plan complexe - Exercices

Géométrie complexe et applications

I - Échauffements

Exercice 1 Dans le plan rapporté à un repère orthonormal,

a) Placer les points $A(2;4)$ et $B(-3,5)$.

b) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et la longueur AB.

c) Calculer les coordonnées du milieu de $[AB]$.

d) On note A' et A'' les symétriques de A respectivement par rapport à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées. Donner les coordonnées de A' et A''.

e) Déterminer les coordonnées des points M tels que $AM = BM$. Tracer ces points.

Exercice 2 Tracer le cercle trigonométrique et placer sur ce cercle les points associés aux angles

$$\pi, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{6}$$

Donner pour chaque angle les valeurs exactes de leur cosinus et sinus.

Exercice 3 Simplifier : $A = e^2 e^5$, $\quad B = e^{2x} e2 + 3x$, $\quad C = \dfrac{\left(e^{3x}\right)^2 e^{-2x}}{e^x}$, $\quad D = e^x \dfrac{\left(e^{2x}\right)^3}{\dfrac{e^{8x+1}}{e^x}}$

II - Plan complexe

Exercice 4 Placer les points A, B et C d'affixe respectif : $z_A = -1 - 2i$, $z_B = 4 - i$ et $z_C = \sqrt{2} + \dfrac{3}{2}i$.
Déterminer les longueurs OA, OB et OC et AB.

Exercice 5 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que $Z = z^2 + \overline{z}$ soit réel.

Exercice 6 Les points A, B et C ont pour affixe respective $-2 + i$, $3 + 3i$, $1 + \dfrac{11}{5}i$.

a) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A, B et C sont alignés.

c) Placer les points A, B et C.

Exercice 7 Les points A, B et C ont pour affixe respective $1 + \dfrac{1}{2}i$, $\dfrac{3}{2} + 2i$ et $-1 - \dfrac{11}{2}i$.
Montrer que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 8 On considère dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = 3 + i\ , \quad z_B = 2 - 2i\ , \quad z_C = 2i \ \text{ et } \ z_D = 1 + 5i.$$

Faire une figure, puis montrer de deux façons différentes que $ABCD$ est un parallélogramme.

III - Module et argument d'un nombre complexe

Exercice 9 Placer les points dont les affixes sont les complexes suivants, puis en calculer le module et déterminer un argument : $z_1 = 2+2i$, $z_2 = 5$, $z_3 = 3i$, $z_4 = -6$, $z_5 = -1+i$, $z_6 = \sqrt{3}+i$.

Exercice 10 Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 1+i \ , \ z_B = 4+5i \ , \ z_C = 5-2i \ .$$

1. Montrer que $AB = AC$, puis que $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.
2. Déterminer l'affixe du point K tel que le quadrilatère $ABKC$ soit un rectangle.
3. a) Déterminer l'affixe du point G tel que le quadrilatère $AGBC$ soit un parallélogramme.
   b) Vérifier que B est le milieu du segment $[GK]$.

Exercice 11 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

- $|z-6i| = 3$ • $|z+3-2i| < 2$ • $|z+2| = |z-3i+1|$ • $|2-iz| = |z+5|$ • $\left|\dfrac{z+2i}{z+1-2i}\right| > 1$
- $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6}$ • $|z-3| = |z+2i|$ • $|z+1-2i| < \sqrt{5}$ • $\left|\overline{z}+\dfrac{i}{2}\right| = 4$ • $\arg(z+i) = \pi$

Exercice 12 Soit A, B et C les trois points d'affixes $z_A = 2i$, $z_B = 2+i$ et $z_C = 1-i$.
Montrer, de deux manières différentes, que ABC est un triangle rectangle en B.

IV - Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Exercice 13 Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

- $z_1 = 3$ • $z_2 = -4$ • $z_3 = 2i$ • $z_4 = -1+i$ • $z_5 = -\sqrt{3}+i$
- $z_6 = -17$ • $z_7 = -6\sqrt{3}+6i$ • $z_8 = 5i$ • $z_9 = \sqrt{6}+i\sqrt{2}$.

V - Exponentielle complexe

Exercice 14 Placer dans le plan complexe et écrire sous formes trigonométrique et algébrique les nombres complexes :

- $3e^{-i\frac{\pi}{2}}$ • $\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}$ • $6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ • $5e^{i\frac{5\pi}{3}}$ • $2e^{i\frac{\pi}{4}}\,e^{-i\frac{3\pi}{2}}$ • $\dfrac{3e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

Exercice 15 Ecrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes :

- 5 • $4+4i$ • $\dfrac{3}{2}i$ • $\dfrac{2}{1-i}$ • $\sqrt{3}-i$ • $\left(\sqrt{3}-i\right)^2$ • $\left(\sqrt{3}-i\right)^3$

Exercice 16 On donne $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$, et $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.
Donner sous la forme exponentielle puis algébrique les complexes : $z_1z_2z_3$, $\dfrac{z_1}{z_2z_3}$, z_2^2, z_3^6.

Exercice 17 Simplifier l'expression, où $\theta \in \mathbb{R}$, $\left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$.
Etait-ce prévisible sans calcul ?

Exercice 18 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

- $\arg(z-3)=\dfrac{\pi}{3}$ - $\arg(-2z)=\dfrac{\pi}{4}$ - $\arg((1+i)z)=0$ - $\arg\left(\dfrac{1}{iz}\right)=\pi$
- $|z-2i|=3$ - $\arg\left(\dfrac{z+2}{z-2i}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ - $|z+1|=|z-2i|$ - $|z+1-i|=\sqrt{2}$

Exercice 19 Ecrire le nombre complexe $(\sqrt{3}-i)^{10}$ sous forme algébrique.

Exercice 20 Calculer le module et un argument des complexes suivants, puis les écrire sous formes trigonométrique, exponentielle et algébrique :

$$z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1+i)} \qquad\qquad z_2=\frac{5(-1+i)}{\sqrt{3}+i}$$

Exercice 21

a) Ecrire sous forme trigonométrique les complexes $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=1-i$, et $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$.

b) Déterminer la forme algébrique de Z, et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 22

a) Ecrire sous forme trigonométrique les complexes $z_1=-1-i$, $z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, et $Z=z_1z_2$.

b) Déterminer la forme algébrique de Z. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 23 On considère l'équation $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$, où θ est un réel donné dans $[0;2\pi[$.

a) Vérifier que le discriminant de cette équation est $\Delta=-4\sin^2(\theta)$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation proposée, en discutant suivant les valeurs de θ, en donnant les solutions sous formes exponentielle.

Exercice 24 Ecrire sous forme exponentielle les solutions de : $z^2-2z\sin^2\alpha+\sin^2\alpha=0$.

Exercice 25

a) Donner sous forme exponentielle les solutions de l'équation : $z^2+z+1=0$.

b) Soit α un réel donné. Factoriser l'expression : $z^2-e^{2i\alpha}$.

c) En déduire les solutions de l'équation : $z^4+z^2+1=0$.

Exercice 26 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+4z^2-21=0$.

Exercice 27 On considère l'équation du second degré (E) : $z^2+(1+i\sqrt{3})z-1=0$.

1. Déterminer le discriminant Δ de cette équation. Écrire Δ sous forme exponentielle.
2. Donner un nombre complexe δ tel que $\delta^2=\Delta$. Écrire δ sous forme algébrique.
3. Vérifier que les formules usuelles du second degré, $z_1=\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\delta}{2a}$ donnent bien deux solutions de (E).

Exercice 28 *(Formules trigonométriques)*

Soit θ et θ' deux réels quelconques.

En exprimant de deux manières différentes le complexe $e^{i\theta}e^{i\theta'}$, exprimer $\cos(\theta+\theta')$ et $\sin(\theta+\theta')$ en fonction des cosinus et sinus de θ et θ'.

Exprimer de la même façon $\sin(2\theta)$ et $\cos(2\theta)$.

Exercice 29 En utilisant la notation exponentielle complexe et/ou les formules trigonométriques, exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les valeurs de :

- $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
- $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
- $\cos\left(x+\pi\right)$
- $\sin\left(x+\pi\right)$
- $\cos\left(\pi-x\right)$
- $\sin\left(\pi-x\right)$

Exercice 30

1. a) Calculer $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

   b) Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en remarquant que $\frac{\pi}{6}=2\times\frac{\pi}{12}$.

2. Exprimer $\frac{5\pi}{12}$ en fonction de $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$. Déterminer alors les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 31

1. x est un nombre réel. Ecrire la forme algébrique et la forme exponentielle de $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)e^{ix}$.
2. Utiliser la question précédente pour résoudre dans $]-\pi;\pi[$ l'équation $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{2}$.

Exercice 32 **Factorisation par l'angle moitié.**

a) Factoriser e^2x dans la somme e^x+e^{3x}.

b) Résoudre alors dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation : $\cos(x)+\cos(3x)=0$.

c) Résoudre de la même façon, dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$, l'équation : $\sin(2x)+\sin(6x)=0$.