Exercices de révision sur les nombres complexes :

Fiche 01

Exercice 1

QCM

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des quatre questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit $z = (3 - i)(5 + 3i)$. La partie imaginaire du nombre complexe $\bar{z}$ est :

a) -4 **b)** 4 **c)** $4i$ **d)** $-5i$

2) La forme algébrique de l'inverse du nombre complexe $a = 2 - 3i$ est

a) $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$ **b)** $a = -\frac{2}{5} - \frac{3}{5}i$ **c)** $a = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}i$ **d)** $a = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$

3) Soit le polynôme P tel que $P(z) = z^3 - 2z^2 + 2z$. Alors $P(2i) =$

a) $2 - 6i$ **b)** $2 + 12i$ **c)** $8 + 12i$ **d)** $8 - 4i$

4) L'équation $(-4 + 3i)z = 4 + 2i$ a pour solution

a) $z = -\frac{24}{25} - \frac{4}{5}i$ **b)** $z = \frac{24}{25} + \frac{4}{5}i$ **c)** $z = -\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$ **d)** $z = \frac{2}{5} + \frac{4}{25}i$

Exercice 2

Forme algébrique

Mettre les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

1) $z_1 = \dfrac{4 + 3i}{1 + 2i}$ 2) $z_2 = \dfrac{(2 - 5i)(1 - 3i)}{-1 + i}$

Exercice 3

Équations du premier degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en donnant la solution sous forme algébrique :

1) $(2 + 4i)(z - 2i) = 1$

2) $(3 + 2i)z + (1 - 5i)\bar{z} = -19 - 2i$, on pourra poser $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

Équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en donnant les solutions sous forme algébrique :

1) $2z^2 + 11z + 16 = 0$

2) $z^2 - 4\bar{z} - 5 = 0$, on pourra poser $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$

Exercice 5

Ensemble de points

Pour tout complexes $z \neq 1$, on pose $z' = \dfrac{z+2i}{z-1}$.

Soit le point A d'affixe 1. On pourra poser $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

1) Montrer que l'ensemble E_1 des points M(z) pour que z' soit réel est une droite privée d'un point dont on déterminera une équation.
2) Montrer que l'ensemble E_2 des points M(z) pour que z' soit un imaginaire pur est un cercle privé d'un point dont on déterminera le centre et le rayon.
3) Tracer ces deux ensembles E_1 et E_2 dans le plan complexe de repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 6

Racines d'un polynôme

Soit le polynôme $P(z)$ tel que : $P(z) = z^4 + 16$

1) Déterminer le réel positif b tel que $P(z) = (z^2 + bz + 4)(z^2 - bz + 4)$
2) En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de $P(z) = 0$

Solution des Exercices de révision sur les nombres complexes :

Fiche 01

EXERCICE 1

QCM

1) **Réponse a)** : $z = 18 + 4i \Rightarrow \bar{z} = 18 - 4i$.

2) **Réponse d)** : $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2-3i} = \dfrac{2+3i}{4+9} = \dfrac{2}{13} + \dfrac{3}{13}i$.

3) **Réponse d)** : $P(2i) = (2i)^3 - 2(2i)^2 + 2(2i) = -8i + 8 + 4i = 8 - 4i$.

4) **Réponse c)** : $z = \dfrac{4+2i}{-4+3i} = \dfrac{(4+2i)(-4-3i)}{16+9} = \dfrac{-16-12i-8i+6}{25} = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5}i$.

EXERCICE 2

Forme algébrique

1) $z_1 = \dfrac{4+3i}{1+2i} = \dfrac{(4+3i)(1-2i)}{1+4} = \dfrac{4-8i+3i+6}{5} = 2 - i$.

2) $z_2 = \dfrac{(2-5i)(1-3i)}{-1+i} = \dfrac{2-6i-5i-15}{-1+i} = \dfrac{(-13-11i)(-1-i)}{1+1} = \dfrac{13+13i+11i-11}{2}$
$= 1 + 12i$.

EXERCICE 3

Équations du premier degré

1) $(2+4i)(z-2i) = 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{2+4i} + 2i = \dfrac{1+4i-8}{2+4i} = \dfrac{(-7+4i)(2-4i)}{4+16}$

$= \dfrac{-14+28i+8i+16}{20} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{9}{5}i \Leftrightarrow S = \left\{\dfrac{1}{10} + \dfrac{9}{5}i\right\}$.

2) $(3+2i)z + (1-5i)\bar{z} = -19-2i \Leftrightarrow (3+2i)(x+iy) + (1-5i)(x-iy) = -19-2i \Leftrightarrow$

$3x + 3iy + 2ix - 2y + x - iy - 5ix - 5y = -19 - 2i \Leftrightarrow 4x - 7y + i(-3x+2y) = -19 - 2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 7y = -19 \ (\times 3) \\ -3x + 2y = -2 \ \ (\times 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 21y = -57 \\ -12x + 8y = -8 \end{cases}$ par somme $-13y = -65 \Leftrightarrow y = 5$

En remplaçant dans la 1re équation : $x = \dfrac{-19+7y}{4} = \dfrac{-19+35}{4} = 4$ d'où $S = \{4+5i\}$.

EXERCICE 4

Équations du second degré

1) $2z^2+11z+16 = 0$ on a $\Delta = 121-128 = -7 < 0$ deux solutions complexes conjuguées.

$$z_1 = \frac{-11 + i\sqrt{7}}{4} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-11 - i\sqrt{7}}{4}$$

2) $(x+iy)^2-4(x-iy)-5=0 \iff (x^2-y^2-4x-5)+i(2xy+4y)=0 \iff$

$$\begin{cases}(x-2)^2-y^2=9 \ \ (1)\\ y(x+2)=0 \ \ (2)\end{cases} \iff \begin{cases}(2)\ \ y=0\\ (1)\ \ (x-2)^2=9\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}(2)\ \ x=-2\\ (1)\ \ y^2=7\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}y=0\\ x=5 \text{ ou } x=-1\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x=-2\\ y=\pm\sqrt{7}\end{cases} \iff S=\{5\,;\,-1\,;\,-2+i\sqrt{7}\,;\,-2-i\sqrt{7}\}$$

Exercice 5

Ensemble de points

1) $z' \in \mathbb{R} \iff z' = \overline{z'} \iff \dfrac{z+2i}{z-1} = \dfrac{\bar z - 2i}{\bar z - 1} \overset{z\neq 1}{\iff} (z+2i)(\bar z-1) = (z-1)(\bar z - 2i) \iff$

$\cancel{z\bar z} - z + 2i\bar z - 2i = \cancel{z\bar z} - 2iz - \bar z + 2i \iff -(z-\bar z) + 2i(z+\bar z) = 4i$ on pose $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

On obtient alors : $-2iy + 4ix = 4i \overset{\div 2i}{\iff} -y+2x = 2 \iff y = 2x-2.$

E_1 est la droite d'équation $y = 2x-2$ privé du point A.

2) $z' \in i\mathbb{R} \iff z' = -\overline{z'} \iff \dfrac{z+2i}{z-1} = \dfrac{-\bar z + 2i}{\bar z - 1} \iff (z+2i)(\bar z - 1) = (z-1)(-\bar z + 2i) \iff$

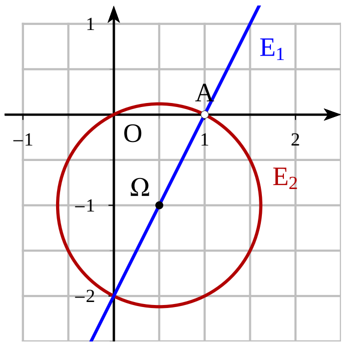
$z\bar z - z + 2i\bar z - \cancel{2i} = -z\bar z + 2iz + \bar z - \cancel{2i} \iff 2z\bar z - (z+\bar z) - 2i(z-\bar z) = 0$ on pose $z = x+iy$

On obtient alors : $2(x^2+y^2) - 2x + 4y = 0 \overset{\div 2}{\iff} x^2 - x + y^2 + 2y = 0 \iff$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y+1)^2 - 1 = 0 \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4}$$

E_2 est le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2}\,;-1\right)$ et de rayon $\sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point A.

3) On obtient les ensembles Γ_1 et Γ_2 suivants :



Exercice 6

Racines d'un polynôme

1) $(z^2+bz+4)(z^2-bz+4) = z^4 + (8-b^2)z^2 + 16 \overset{b>0}{\Rightarrow} b = 2\sqrt{2}$

2) $P(z) = 0 \iff (z^2 + 2z\sqrt{2} + 4)(z^2 - 2z\sqrt{2} + 4) = 0$

$z^2 + 2z\sqrt{2} + 4 = 0$ ou $z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0$

$\Delta = 8 - 16 = -8 < 0$; $\Delta = 8 - 16 = -8 < 0$

2 solutions complexes conjuguées ; 2 solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \qquad z_3 = \frac{2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = \frac{-2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \qquad z_4 = \frac{2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

Exercices de révision sur les nombres complexes :

Fiche 02

Exercice 1

QCM

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des quatre questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) La partie imaginaire du nombre complexe $z = 3 - 2i$ est

a) $-2i$ **b)** 3 **c)** -2 **d)** i

2) La forme algébrique de nombre complexe $(3+i)(5-i)$ est

a) $15 - i^2$ **b)** $15 + i^2$ **c)** $14 + 2i$ **d)** $16 + 2i$

3) La forme algébrique de nombre complexe $\dfrac{2-3i}{1+i}$ est

a) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ **b)** $\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i$ **c)** $-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$ **d)** $1 - 2i$

4) Le polynôme $P(z) = 2z^3 + 3z^2 + 5z + 4$ est factorisable par

a) $z - 1$ **b)** $z + 1$ **c)** $z - i$ **d)** $z + 2$

Exercice 2

Forme algébrique

Mettre les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

1) $z_1 = \dfrac{1+2i}{2+i}$ 2) $z_2 = \dfrac{3-15i}{3-2i}$

Exercice 3

Équations du premier degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en donnant la solution sous forme algébrique :

1) $iz + 1 - 2i = 0$ 2) $(2+i)z + 2 - i = 3z + 5$

3) $z - 2i\bar{z} = 5 - i$, on pourra poser $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$

Exercice 4

Équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en donnant les solutions sous forme algébrique :

1) $3z^2 + 12z + 39 = 0$ 2) $z(z^2 - 8z + 32) = 0$

Exercice 5

Racines d'un polynôme

Soit le polynôme $P(z)$ tel que : $P(z) = z^4 + 2z^2 - 8z + 5$

1) Montrer que l'on peut écrire $P(z) = (z-1)^2(z^2 + 2z + 5)$
2) En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de $P(z) = 0$

Exercice 6

Ensemble de points

Pour tout complexes $z \neq 1$, on pose $z' = \dfrac{z+i}{z-1}$.

Soit le point A d'affixe 1. On pourra poser $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

1) Montrer que l'ensemble Γ_1 des points M(z) pour que z' soit réel est une droite privée d'un point dont on déterminera une équation.
2) Montrer que l'ensemble Γ_2 des points M(z) pour que z' soit un imaginaire pur est un cercle privé d'un point dont on déterminera le centre et le rayon.
3) Tracer ces deux ensembles Γ_1 et Γ_2 dans le plan complexe de repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Solution des Exercices de révision sur les nombres complexes :

Fiche 02

EXERCICE 1

QCM

1) **Réponse c)**

2) **Réponse d)** $(3+i)(5-i) = 15 - 3i + 5i + 1 = 16 + 2i$

3) **Réponse c)** $\dfrac{2-3i}{1+i} = \dfrac{(2-3i)(1-i)}{1^2+1^2} = \dfrac{2-2i-3i-3}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}i$

4) **Réponse b)** $z = -1$ racine de $P(z)$ car :

   $P(-1) = 2(-1)^3+3(-1)^2+5(-1)+4 = -2+3-5+4 = 0$ donc $P(z) = (z+1)(az^2+bz+c)$.

EXERCICE 2

Forme algébrique

1) $z_1 = \dfrac{1+2i}{2+i} = \dfrac{(1+2i)(2-i)}{2^2+1^2} = \dfrac{2-i+4i+2}{5} = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i$

2) $z_2 = \dfrac{3-15i}{3-2i} = \dfrac{3(1-5i)(3+2i)}{3^2+2^2} = \dfrac{3(3+2i-15i+10)}{13} = \dfrac{3(13-13i)}{13} = 3-3i$

EXERCICE 3

Équations du premier degré

1) $iz + 1 - 2i = 0 \Leftrightarrow iz = -1 + 2i \Leftrightarrow z = \dfrac{-1+2i}{i} = 2 + i$

2) $(2+i)z + 2 - i = 3z + 5 \Leftrightarrow (-1+i)z = 3 + i \Leftrightarrow z = \dfrac{3+i}{-1+i} = \dfrac{(3+i)(-1-i)}{1^2+1^2}$

$$= \dfrac{-3-3i-i+1}{2} = -1-2i$$

3) $z - 2i\bar{z} = 5 - i$, on pose $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, l'équation devient :

   $x + iy - 2i(x - iy) = 5 - i \Leftrightarrow x + iy - 2ix - 2y = 5 - i = 0 \Leftrightarrow (x-2y) + i(-2x+y) = 5 - i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 5 \\ -2x + y = -1 \ (\times 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 5 \ (1) \\ -4x + 2y = -2 \ (2) \end{cases} \overset{(1)+(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -3x = 3 \Leftrightarrow x = -1 \\ (2) \ y = -1 + 2x = -3 \end{cases}$$

   La solution est donc $z = -1 - 3i$

EXERCICE 4

Équations du second degré

1) $3z^2 + 12z + 39 = 0 \overset{\div 3}{\Leftrightarrow} z^2 + 4z + 13 = 0$, $\Delta = 16 - 52 = -36 = (6i)^2$.

   $\Delta < 0$, deux racines complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-4+6i}{2} = -2 + 3i$ et $z_2 = -2 - 3i$

2) $z(z^2-8z+32)=0 \iff z=0$ ou $z^2-8z+32=0$ (2)
de (2) , $\Delta = 64-128=-64=(8i)^2$ deux racines complexes conjuguées :
$$z_1=\frac{8+8i}{2}=4+4i \text{ ou } z_2=4-4i \text{ d'où } S=\{0\,;\,4-4i\,;\,4+4i\}$$

Exercice 5

Racines d'un polynôme

1) $(z-1)^2(z^2+2z+5)=(z^2-2z+1)(z^2+2z+5)=z^4+2z^3+5z^2-2z^3-4z^2-10z+z^2+2z+5$
$$=z^4+2z^2-8z+5=P(z)$$

2) $P(z)=0 \iff (z-1)^2(z^2+2z+5)=0 \iff z=1$ ou $z^2+2z+5=0$ (2)
De (2) , $\Delta=4-20=-16=(4i)^2$ deux racines complexes conjuguées :
$$z_1=\frac{-2+4i}{2}=-1+2i \text{ ou } z_2=-1-2i \text{ d'où } S=\{1\,;-1-2i\,;-1+2i\}$$

Exercice 6

Ensemble de points

1) $z'\in\mathbb{R} \iff z'=\overline{z'} \iff \dfrac{z+i}{z-1}=\dfrac{\bar z-i}{\bar z-1} \overset{z\neq 1}{\iff} (z+i)(\bar z-1)=(z-1)(\bar z-i) \iff$
$\cancel{z\bar z}-z+i\bar z-i=\cancel{z\bar z}-iz-\bar z+i \iff (-z+\bar z)+i(z+\bar z)=2i$ on pose $z=x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$

On obtient alors : $-2iy+2ix=2i \overset{\div 2i}{\iff} -y+x=1 \iff y=x-1.$

Γ_1 est la droite d'équation $y=x-1$ privé du point A.

2) $z'\in i\mathbb{R} \iff z'+\overline{z'}=0 \iff \dfrac{z+i}{z-1}+\dfrac{\bar z-i}{\bar z-1}=0 \iff \dfrac{(z+i)(\bar z-1)+(z-1)(\bar z-i)}{(z-1)(\bar z-1)}=0 \iff$
$z\bar z-z+i\bar z-i+z\bar z-iz-\bar z+i=0 \iff 2z\bar z-(z+\bar z)+i(-z+\bar z)=0$ on pose $z=x+iy$

On obtient alors : $2(x^2+y^2)-2x+i(-2iy)=0 \overset{\div 2}{\iff} x^2-x+y^2+y=0 \iff$
$$\left(x-\frac12\right)^2-\frac14+\left(y+\frac12\right)^2-\frac14=0 \iff \left(x-\frac12\right)^2+\left(y+\frac12\right)^2=\frac12$$

Γ_2 est le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac12\,;-\dfrac12\right)$ et de rayon $\sqrt{\dfrac12}=\dfrac{\sqrt2}{2}$ privé du point A.

Remarque : : Le cercle Γ_2 passe par l'origine O.

3) On obtient les ensembles Γ_1 et Γ_2 suivants :