Sujet 01 **NOMBRES COMPLEXES**

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Pour tout nombre Z, on pose $P(Z) = Z^4 - 1$.

a. Factoriser $P(Z)$.

b. En déduire les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation $P(Z) = 0$, d'inconnue Z.

c. Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1.$$

2. a. Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (l'unité graphique est 5 cm).

Placer les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -2,\ b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}\mathrm{i} \text{ et } c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}$$

b. Démontrer que les points O, A, B et C sont situés sur un cercle, que l'on déterminera.

3. Placer le point D d'affixe $d = -\frac{1}{2}$.

Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par :

$$z' = \frac{a-c}{d-c}.$$

En déduire le rapport $\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CD}}$.

Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

Sujet 02 **NOMBRES COMPLEXES**

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

On considère le polynôme $\mathrm{P}(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$, où z est un nombre complexe.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$\mathrm{P}(z) = \left(z^2 + az + b\right)\left(z^2 + 4z + 20\right).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$.

3. Placer dans un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les images M, N, P et Q des nombres complexes respectifs $m = -2 + 4\mathrm{i}$, $n = -2 - 4\mathrm{i}$, $p = 2 + 3\mathrm{i}$ et $q = 2 - 3\mathrm{i}$.

4. **a.** Déterminer le nombre complexe z vérifiant $\dfrac{z - p}{z - m} = \mathrm{i}$. Placer son image K.

b. En déduire que le triangle MPK est isocèle rectangle en K.

4. **a.** Déterminer par le calcul l'affixe du point L, quatrième sommet du carré MKPL.

b. Déterminer l'abscisse du point d'intersection R de la droite (KL) et de l'axe des abscisses.

c. Montrer que M, N, P et Q sont sur un même cercle de centre R.

SUjet 03 **NOMBRES COMPLEXES**

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique 4 cm. Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, i désigne le nombre de module 1, et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de -2, associe

$$Z = f(z) = \frac{z-2+\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}}.$$

1. Si $z = x+\mathrm{i}y$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.

   On vérifiera que $\Re(Z) = \dfrac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$.

   En déduire la nature de :

   a. l'ensemble E des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel ;

   b. l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.

   c. Représenter ces deux ensembles.

2. On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2-\mathrm{i}$ et $z_B = -2\mathrm{i}$.

   En remarquant que $Z = \dfrac{z-z_A}{z-z_B}$, retrouver les ensembles E et F par une méthode géométrique.

3. Calculer $|f(z)-1| \times |z+2\mathrm{i}|$, et en déduire que les points M' d'affixe Z, lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.

Sujet 04 **NOMBRES COMPLEXES**

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique 4 cm, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 2\text{i}, \quad z_{\text{B}} = \text{i}, \quad z_{\text{C}} = -1+\text{i}, \quad z_{\text{D}} = 1+\text{i}.$$

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit la fonction f de $\mathscr{P}$ - {B} dans $\mathscr{P}$ qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' où

$$z' = \text{i}\frac{z-2\text{i}}{z-\text{i}}.$$

a. Développer $(z+1-\text{i})(z-1-\text{i})$.

b. Chercher les points M vérifiant $f(M) = M$ et exprimer leurs affixes sous forme algébrique puis trigonométrique.

2. a. Montrer que, pour tout z différent de i,

$$|z'| = \frac{\text{A}M}{\text{B}M},$$

et que, pour tout z différent de i et de 2i,

$$\arg\left(z'\right) = \left(\overrightarrow{\text{B}M}, \overrightarrow{\text{A}M}\right) + \frac{\pi}{2} \quad (\text{modulo} 2\pi).$$

b. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

c. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $\arg\left(z'\right) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{modulo} \quad 2\pi)$.

3. a. Démontrer que $z' - \text{i} = \frac{1}{z-\text{i}}$ et en déduire que $|z'-\text{i}| \times |z-\text{i}| = 1$, pour tout complexe z différent de i.

b. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$. Prouver que le point M' d'affixe z' appartient à un cercle de centre B et de rayon à déterminer.

Sujet 05 **NOMBRES COMPLEXES**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 4 cm. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
Soit A le point d'affixe $z_A = -i$ et B le point d'affixe $z_B = -2i$.
On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, M distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{iz-2}{z+i}$.

1. Démontrer que, si z est un imaginaire pur, $z \neq -i$, alors z' est imaginaire pur.
2. Déterminer les points invariants par l'application f.
3. Calculer $\left|z'-i\right| \times |z+i|$.
   Montrer que, quand le point M décrit le cercle de centre A et de rayon 2, le point M' reste sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
4. **a.** Développer $(z+i)^2$, puis factoriser $z^2+2iz-2$.
   b. Déterminer et représenter l'ensemble des points M, tels que M' soit le symétrique de M par rapport à O.
5. Déterminer et représenter l'ensemble E des points M, tels que le module de z' soit égal à 1.
   $\left(\text{On pourra remarquer que } z' = \frac{i(z-z_B)}{z-z_A}.\right)$

Sujet 06 **NOMBRES COMPLEXES**

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique 2 cm. On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$, et par $(\mathscr{C})$ le cercle de centre A et de rayon 1.

Partie A

Soit F le point d'affixe 2, B le point d'affixe $z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et E le point d'affixe $(1 + z_B^2)$.

1. **a.** Montrer que le point B appartient au cercle $(\mathscr{C})$.

   b. Déterminer une mesure en radians de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{AF}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)$. Placer le point B.

2. **a.** Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $(z_B - z_A)$ et $(z_E - z_A)$.

   b. En déduire que les points A , B et E sont alignés.

3. Placer le point E.

Partie B

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' où $z' = 1 + z^2$.

1. Pour $z \neq 0$ et $z \neq 1$, donner, à l'aide des points A, M et M', une interprétation géométrique d'un argument du nombre complexe $\dfrac{z'-1}{z-1}$.

2. En déduire que A, M et M' sont alignés si et seulement si $\dfrac{z^2}{z-1}$ est un réel.

Sujet 07 **NOMBRES COMPLEXES**

EXERCICE 2 **enseignement obligatoire**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 5 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_A = 1 + i \quad \text{et} \quad z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.
2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $(\mathscr{C})$ d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0\,;2\pi]$.
   On considère l'application f qui tout point M de $(\mathscr{C})$, associe
   $f(M) = MA \times MB$.
   a. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante :

$$e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}\sin\alpha.$$

   b. Montrer l'égalité suivante : $f(M) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.
   c. En déduire l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$.
3. **a.** En utilisant **2 c**, montrer qu'il existe deux points M de $(\mathscr{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donner cette valeur minimale.
   b. En utilisant **2 c**, montrer qu'il existe un seul point M de $(\mathscr{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donner cette valeur maximale.

Sujet 08 **NOMBRES COMPEXES**

Complexes.

On considère le polynôme P défini sur C par : $P(z) = z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 8z + 8$.

1°) Justifier que : $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.

En déduire que si z_0 est une racine de P, alors son conjugué est aussi une racine de P.

2°) a) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ sachant qu'elle admet deux racines imaginaires pures.

b) Déterminer la forme trigonométrique de chacune des solutions de l'équation précédente.

3°) Soient M_1, M_2, M_3 et M_4 les points d'affixes respectives $-2i$, $2i$, $-1 + i$ et $-1 - i$.

a) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan complexe et démontrer que $M_1M_2M_3M_4$ est un trapèze isocèle.

b) Démontrer que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 appartiennent à un même cercle de centre A d'affixe 1 dont on précisera le rayon.

Sujet 09 **NOMBRES COMPLEXES**

EXERCICE 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O , $\vec{u}$, $\vec{v}$)

On appelle f l' application qui à tout point M d' affixe z ($z \neq -1$) associe le point M' d' affixe z' telle que

$$z' = \frac{-iz - 2}{z + 1}$$

Soient A , B , C les points d' affixe respectives a = -1 , b = 2i , c = -i

1- Soit C' l' image du point C par f , Donner l' affixe c' du point C' sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique

2- Calculer l' affixe d du point D ayant pour image par f le pont D' d' affixe $d' = \frac{1}{2}$

3- Pour tout nombre complexe z différent de -1 , on note p le module de z + 1 (c' est à dire $|z+1| = p$) et p' le module de z' + i (c' est à dire $|z'+i| = p'$)

a- Démontrer que , pour tout nombre complexe z différent de -1 on a :
$pp' = \sqrt{5}$

b- Si le point M appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2 , montrer que le point M' = f(M) appartient au cercle (Γ') dont on précisera le centre et le rayon

4- Pour tout nombre complexe z différent de -1 , on considère le nombre complexe

$$\omega = \frac{z - 2i}{z + 1}$$

a- interpréter géométriquement l' argument du nombre complexe ω

b- montrer que $z' = -i\omega$

c- déterminer l ' ensemble (F) des point M d' affixe z tels que z' soit réel un non nul

d- Vérifier que le point D appartient aux ensembles (Γ) et (F)

5- Représenter les ensembles (Γ) , (Γ') , (F) (unité 4 cm)

Sujet 10 **NOMBRES COMPLEXES**

Exercice .

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - 2i$ et $z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ dans le plan complexe (O ; $\vec{u}, \vec{v}$).

1°) a) Déterminer le module et un argument de z_A et z_B. et $\frac{z_B}{z_A}$.

b) En déduire la nature du triangle AOB. (la figure n'est pas demandée)

2°) Déterminer la forme trigonométrique et la forme algébrique de $\frac{z_B}{z_A}$.

3°) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 2 *(4,5 points)*

Pour tout complexe z on considère : $f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$.

1°) Soit b un réel, exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaire de $f(ib)$.

2°) En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux racines imaginaires pures.

3°) Démontrer qu'il existe deux réels α et β que l'on déterminera, tels que, pour tout complexe z,

$f(z) = (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta)$

4°) Résoudre dans **C** l'équation $f(z) = 0$.

Sujet 11 **NOMBRES COMPLEXES**

EXERCICE

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) (unité graphique: 3 cm).

On désigne par A le point d'affixe i.

A tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{z^2}{i-z}$$

1. Déterminer les points M confondus avec leur image M'.

2. Etant donné un complexe distinct de i, on pose: $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y, x', y' réels.

Montrer que :

$$x' = \frac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}.$$

En déduire l'ensemble des points M dont l'image M' est située sur l'axe des imaginaires purs. Dessiner l'ensemble E.

3. Trouver une relation simple liant les longueurs OM, AM et OM'.

En déduire l'ensemble F des points M du plan tels que M et M' soient situés sur un même cercle de centre O. Dessiner l'ensemble F.

Sujet 12 **NOMBRES COMPLEXES**

EXERCICE

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

Soient les nombres complexes $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$ et $z_0 = 6 + 6i$ d'image A_0.

Pour tout n entier naturel non nul, on désigne par A_n le point d'affixe z_n définie par $z_n = a^n z_0$. .

Partie A

1. Exprimer z_1 et a^2 sous forme algébrique. (0,5 point)

Écrire z_1 sous forme exponentielle et montrer que $a^2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$. (0,5 point)

2. Exprimer z_3 puis z_7 en fonction de z_1 et a^2 ; en déduire l'expression de z_3 et z_7 sous forme exponentielle. (1 point)

3. Placer les points A_0, A_1, A_3 et A_7 images respectives des complexes z_0, z_1, z_3 et z_7.

(1 point)

Partie B

Pour tout n entier naturel, on pose $|z_n| = r_n$.

1. Montrer que, pour tout n de N, $r_n = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$. (0,5 point)

2. En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. (1 point)

3. Déterminer la limite de la suite (r_n) et interpréter géométriquement le résultat obtenu. (0,5 point)

4. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $OA_p \leq 10^{-3}$ et donner alors une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OA_p})$. (1 point)

Sujet 13 **NOMBRES COMPLEXES**

EXERCICE

Partie A

On considère le polynôme P de la variable complexe *z* défini par :

$$P(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7$$

1. *a*) Calculer P(*i*) et P(– *i*). (0,25 + 0,25 point)

b) Montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré, que l'on déterminera, tel que :

pour tout $z \in C$, $P(z) = (z^2 + 1)\,Q(z)$ (0,5 point)

2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation P(*z*) = 0. (1 point)

Partie B

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

1. Placer dans ce repère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = -i$, $z_C = -\sqrt{3} + 2i$, $z_D = -\sqrt{3} - 2i$. (0,5 point)

Montrer que ces quatre points appartiennent au cercle de diamètre [CD]. (0,5 point)

2. Calculer, sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique, le rapport

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}.$$ (0,5 point)

Interpréter géométriquement le module et l'argument de ce rapport. (0,5 point)

Sujet 14 NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE

1°) On considère le polynôme P de la variable complexe *z*, défini par:

$$P(z) = z^3 + (14 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - 14i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}.$$

a) Déterminer le nombre réel *y* tel que i*y* soit solution de l'équation P(*z*) = 0.
b) Trouver deux nombres réels *a* et *b* tels que, pour tout nombre complexe *z*, on ait $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$
c) Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes, l'équation P(*z*) = 0.

2°) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct(O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).

On prendra 1 cm pour unité graphique.

a) Placer les points A, B et I d'affixes respectives $z_A = -7 + 5i$; $z_B = -7 - 5i$ et $z_I = i\sqrt{2}$.
b) Déterminer l'affixe de l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
c) Placer le point C d'affixe $z_C = 1 + i$. Déterminer l'affixe du point N tel que ABCN soit un parallélogramme.
d) Placer le point D d'affixe $z_A = 1 + 11i$. Calculer $Z = \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. Justifier que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires et en déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Sujet 15 **NOMBRES COMPLEXES**

1. Exercice

1. Résoudre dans ***C*** l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D où : $z_A = 1+2i$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 1+\sqrt{3}+i$, $z_D = \overline{z_C}$.

a. Placer les points A et B dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

b. Calculer $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et donner le résultat sous forme algébrique.

c. En déduire la nature du triangle ABC.

3. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.

4. Construire les points C et D dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Expliquer la construction proposée.