

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES

Niveau Terminale — Mercredi 25 mars 2026

Durée : 1 heure 30 • Calculatrice autorisée

Pr. El Akili

Le soin apporté à la rédaction et à la présentation sera pris en compte. Toute réponse devra être justifiée. Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1

10 points

THÈME : GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(0; 4; 1)$, $B(1; 3; 0)$, $C(2; -1; -2)$ et $D(7; -1; 4)$.

Soit Δ la droite passant par D et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 3)$.

1. Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
2.
 - a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC) .
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
 - c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .
 - d. Déterminer les coordonnées du point H , intersection de Δ et du plan (ABC) .
3. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.
 - a. Démontrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
 - b. Vérifier que la droite d , intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 2

10 points

THÈME : ANALYSE

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On étudie la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x e^x - n x.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A — Étude d'une fonction auxiliaire

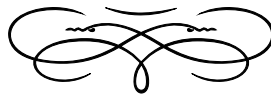
Soit g_n définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = (1 + x) e^x - n$.

1. Calculer la dérivée de g_n , faire le tableau de variation de g_n et déterminer ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que g_n s'annule pour une unique valeur α_n et que $\alpha_n \geq 0$. Que vaut α_1 ?
3. Montrer que $\alpha_n = \ln\left(\frac{n}{1 + \alpha_n}\right)$ et que $0 \leq \alpha_n \leq \ln n$.

4. a. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a $\ln x \leq x - 1$.
- b. En utilisant cette inégalité, déterminer le signe de $g_n(\ln \sqrt{n})$.
- c. En déduire que $\frac{1}{2} \ln n \leq \alpha_n$. Quelles sont les limites de (α_n) et $\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)$?

Partie B — Étude de f_n et applications

1. Calculer $f'_n(x)$, faire le tableau de variations de f_n et déterminer ses limites. Montrer que $f_n(\alpha_n) = \frac{-n\alpha_n^2}{1 + \alpha_n}$.
2. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_n$ avec l'axe des abscisses et préciser la position de $\mathcal{C}_n$ par rapport à cet axe.
3. Calculer $\int_0^{\alpha_2} f_2(x) dx$ en fonction de α_2 .



« *Les mathématiques sont la musique de la raison.* » — *J. J. Sylvester*



Exercice 1 — Géométrie dans l'espace

On a $A(0; 4; 1)$, $B(1; 3; 0)$, $C(2; -1; -2)$, $D(7; -1; 4)$ et $\vec{u}(2; -1; 3)$.

1. Calculons $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 3-4 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-4 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Si A , B , C étaient alignés, il existerait $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$.

On aurait $2 = k$, $-5 = -k = -2$: contradiction. Donc A , B et C ne sont pas alignés.

2.a. Pour montrer que Δ est orthogonale au plan (ABC) , il suffit de vérifier que $\vec{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + (-1) \times (-1) + 3 \times (-1) = 2 + 1 - 3 = 0.$$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2 + (-1) \times (-5) + 3 \times (-3) = 4 + 5 - 9 = 0.$$

Comme $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) , $\Delta \perp (ABC)$.

2.b. Puisque $\vec{u}(2; -1; 3)$ est un vecteur normal à (ABC) , une équation cartésienne est de la forme $2x - y + 3z + d = 0$.

$A(0; 4; 1) \in (ABC)$ donne : $0 - 4 + 3 + d = 0$, soit $d = 1$.

$$(ABC) : 2x - y + 3z + 1 = 0.$$

2.c. Δ passe par $D(7; -1; 4)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 3)$. Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.d. H est l'intersection de Δ et (ABC) . Substituons dans $2x - y + 3z + 1 = 0$:

$$2(7 + 2t) - (-1 - t) + 3(4 + 3t) + 1 = 0 \implies 14 + 4t + 1 + t + 12 + 9t + 1 = 0 \implies 28 + 14t = 0.$$

Donc $t = -2$. En remplaçant :

$$x = 7 + 2(-2) = 3, \quad y = -1 - (-2) = 1, \quad z = 4 + 3(-2) = -2.$$

$$H(3; 1; -2).$$

3.a. $\mathcal{P}_1 : x + y + z = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}_1(1; 1; 1)$ et $\mathcal{P}_2 : x + 4y + 2 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}_2(1; 4; 0)$.

Si les plans étaient parallèles, $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ seraient colinéaires. Or $\frac{1}{1} = 1$ et $\frac{1}{4} \neq 1$.

Donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

3.b. Vérifions que les points de la droite d appartiennent aux deux plans.

Pour $\mathcal{P}_1 : x + y + z = (-4t - 2) + t + (3t + 2) = 0$. ✓

Pour $\mathcal{P}_2 : x + 4y + 2 = (-4t - 2) + 4t + 2 = 0$. ✓

La représentation paramétrique est donc correcte.

3.c. Le vecteur directeur de d est $\vec{v}(-4; 1; 3)$.

Calculons $\vec{v} \cdot \vec{u} = (-4) \times 2 + 1 \times (-1) + 3 \times 3 = -8 - 1 + 9 = 0$.

Comme $\vec{u}$ est normal à (ABC) et $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$, la droite d est parallèle ou incluse dans (ABC) .

Vérifions si un point de d appartient à (ABC) . Pour $t = 0$: le point $(-2; 0; 2)$.

$2(-2) - 0 + 3(2) + 1 = -4 + 6 + 1 = 3 \neq 0$.

Ce point n'appartient pas à (ABC) , donc d et (ABC) sont strictement parallèles.

Exercice 2 — Analyse

On a $f_n(x) = x e^x - nx$ et $g_n(x) = (1 + x) e^x - n$.

Partie A

1. $g'_n(x) = e^x + (1 + x) e^x = (2 + x) e^x$.

Comme $e^x > 0$ pour tout x , le signe de $g'_n(x)$ est celui de $(2 + x)$:

$g'_n(x) = 0 \iff x = -2$, $g'_n(x) < 0$ sur $] -\infty; -2[$ et $g'_n(x) > 0$ sur $] -2; +\infty[$.

Limites :

— $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) = 0 - n = -n$ (car $(1 + x) e^x \rightarrow 0$ par croissances comparées).

— $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$.

Minimum : $g_n(-2) = (1 - 2) e^{-2} - n = -e^{-2} - n < 0$.

Tableau de variations : g_n est strictement décroissante sur $] -\infty; -2]$, atteint son minimum $-e^{-2} - n$ en $x = -2$, puis strictement croissante sur $[-2; +\infty[$.

2. g_n est continue et strictement croissante sur $[-2; +\infty[$, avec $g_n(-2) = -e^{-2} - n < 0$ et $\lim_{+\infty} g_n = +\infty$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, g_n s'annule pour une unique valeur $\alpha_n \in] -2; +\infty[$.

De plus, $g_n(0) = 1 - n$. Pour $n \geq 1$: $g_n(0) = 1 - n \leq 0$, donc $\alpha_n \geq 0$.

Pour $n = 1$: $g_1(0) = 1 \cdot e^0 - 1 = 0$, donc $\alpha_1 = 0$.

3. $g_n(\alpha_n) = 0$ signifie $(1 + \alpha_n) e^{\alpha_n} = n$, soit $e^{\alpha_n} = \frac{n}{1 + \alpha_n}$.

En prenant le logarithme : $\alpha_n = \ln\left(\frac{n}{1 + \alpha_n}\right)$.

Comme $\alpha_n \geq 0$, on a $1 + \alpha_n \geq 1$, donc $\frac{n}{1 + \alpha_n} \leq n$, d'où $\alpha_n = \ln\left(\frac{n}{1 + \alpha_n}\right) \leq \ln n$.

Et $\alpha_n \geq 0$ est déjà établi. Donc $0 \leq \alpha_n \leq \ln n$.

4.a. Posons $h(x) = x - 1 - \ln x$ pour $x > 0$.

$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x}$.

$h'(x) = 0 \iff x = 1$, $h'(x) < 0$ sur $]0; 1[$ et $h'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$.

Donc h admet un minimum en $x = 1 : h(1) = 1 - 1 - 0 = 0$.

Ainsi $h(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, soit $\boxed{\ln x \leq x - 1 \text{ pour tout } x > 0.}$

4.b. Appliquons l'inégalité avec $x = \sqrt{n}$ (pour $n \geq 2$, $\sqrt{n} > 0$) :

$$\ln \sqrt{n} \leq \sqrt{n} - 1.$$

$$\text{Calculons } g_n(\ln \sqrt{n}) = (1 + \ln \sqrt{n}) e^{\ln \sqrt{n}} - n = (1 + \ln \sqrt{n}) \sqrt{n} - n.$$

$$= \sqrt{n} + \sqrt{n} \ln \sqrt{n} - n = \sqrt{n} + \sqrt{n} \ln \sqrt{n} - n.$$

En utilisant $\ln \sqrt{n} \leq \sqrt{n} - 1$:

$$g_n(\ln \sqrt{n}) \leq \sqrt{n} + \sqrt{n}(\sqrt{n} - 1) - n = \sqrt{n} + n - \sqrt{n} - n = 0.$$

Donc $\boxed{g_n(\ln \sqrt{n}) \leq 0.}$

4.c. Puisque $g_n(\ln \sqrt{n}) \leq 0$ et que $g_n(\alpha_n) = 0$, et que g_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ (car $\alpha_n \geq 0 > -2$), on a :

$$\boxed{\frac{1}{2} \ln n = \ln \sqrt{n} \leq \alpha_n.}$$

Limites : Comme $\frac{1}{2} \ln n \leq \alpha_n$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$.

Pour $\frac{\alpha_n}{n}$: on sait que $\alpha_n \leq \ln n$, donc $0 \leq \frac{\alpha_n}{n} \leq \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$.

Par encadrement : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0.}$

Partie B

1. $f_n(x) = x e^x - n x$, donc :

$$f'_n(x) = e^x + x e^x - n = (1 + x) e^x - n = g_n(x).$$

Ainsi le signe de $f'_n(x)$ est celui de $g_n(x)$.

D'après la Partie A, $g_n(x) < 0$ pour $x < \alpha_n$ et $g_n(x) > 0$ pour $x > \alpha_n$ (sur $[0; +\infty[$).

Limites :

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^x - n x) = 0 - n \times (-\infty) = +\infty.$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

f_n est strictement décroissante sur $] -\infty; \alpha_n]$ et strictement croissante sur $[\alpha_n; +\infty[$. Le minimum est atteint en α_n .

Calcul de $f_n(\alpha_n)$: On a $f_n(\alpha_n) = \alpha_n e^{\alpha_n} - n \alpha_n = \alpha_n (e^{\alpha_n} - n)$.

Or $(1 + \alpha_n) e^{\alpha_n} = n$, donc $e^{\alpha_n} = \frac{n}{1 + \alpha_n}$, d'où :

$$e^{\alpha_n} - n = \frac{n}{1 + \alpha_n} - n = \frac{n - n(1 + \alpha_n)}{1 + \alpha_n} = \frac{-n \alpha_n}{1 + \alpha_n}.$$

$$\text{Ainsi : } \boxed{f_n(\alpha_n) = \alpha_n \times \frac{-n \alpha_n}{1 + \alpha_n} = \frac{-n \alpha_n^2}{1 + \alpha_n}.}$$

2. $f_n(x) = x e^x - n x = 0 \iff x(e^x - n) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } e^x = n$, soit $x = \ln n$.

Les points d'intersection avec l'axe des abscisses sont $\boxed{O(0; 0) \text{ et } (\ln n; 0).}$

Signe de $f_n(x)$: $f_n(x) = x(e^x - n)$.

— Pour $x < 0$: $x < 0$ et $e^x < 1 \leq n$, donc $e^x - n < 0$. Produit de deux négatifs : $f_n(x) > 0$.

- Pour $0 < x < \ln n : x > 0$ et $e^x < n$, donc $f_n(x) < 0$.
- Pour $x > \ln n : x > 0$ et $e^x > n$, donc $f_n(x) > 0$.

$\mathcal{C}_n$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur $] -\infty; 0[\cup] \ln n; +\infty[$ et en dessous sur $]0; \ln n[$.

3. On cherche $I = \int_0^{\alpha_2} f_2(x) dx = \int_0^{\alpha_2} (x e^x - 2x) dx$.

Séparons l'intégrale :

$$I = \int_0^{\alpha_2} x e^x dx - 2 \int_0^{\alpha_2} x dx.$$

Seconde intégrale : $\int_0^{\alpha_2} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\alpha_2} = \frac{\alpha_2^2}{2}$.

Première intégrale (IPP) : Posons $u = x$, $v' = e^x$, donc $u' = 1$, $v = e^x$.

$$\int_0^{\alpha_2} x e^x dx = [x e^x]_0^{\alpha_2} - \int_0^{\alpha_2} e^x dx = \alpha_2 e^{\alpha_2} - [e^x]_0^{\alpha_2} = \alpha_2 e^{\alpha_2} - e^{\alpha_2} + 1 = (\alpha_2 - 1) e^{\alpha_2} + 1.$$

Donc :

$$I = (\alpha_2 - 1) e^{\alpha_2} + 1 - \alpha_2^2.$$

On peut simplifier en utilisant $e^{\alpha_2} = \frac{2}{1 + \alpha_2}$ (puisque $(1 + \alpha_2) e^{\alpha_2} = 2$) :

$$I = (\alpha_2 - 1) \cdot \frac{2}{1 + \alpha_2} + 1 - \alpha_2^2 = \frac{2(\alpha_2 - 1)}{1 + \alpha_2} + 1 - \alpha_2^2 = \frac{2\alpha_2 - 2 + (1 - \alpha_2^2)(1 + \alpha_2)}{1 + \alpha_2}.$$

$$(1 - \alpha_2^2)(1 + \alpha_2) = (1 - \alpha_2)(1 + \alpha_2)^2.$$

On peut aussi laisser le résultat sous la forme :

$$\int_0^{\alpha_2} f_2(x) dx = (\alpha_2 - 1) e^{\alpha_2} + 1 - \alpha_2^2.$$

