

Devoir Surveillé n° 5

Géométrie dans l'espace — Intégrales

Durée : 2 heures

Calculatrice autorisée

La qualité de la rédaction, la clarté et la présentation des raisonnements entreront pour une part importante dans la notation. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

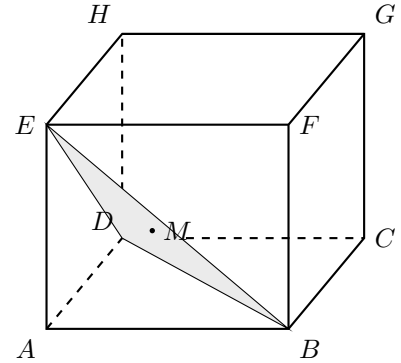
Exercice 1**(4 points)**

On considère un cube $ABCDEFGH$ non aplati. Le point M est défini par

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AG}.$$

Le but est de démontrer que E , B , D et M sont coplanaires.

1. a) Prouver que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED} - 3\overrightarrow{EA}$.
b) En déduire $\overrightarrow{EM}$ en fonction de $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$.
2. Conclure.

**Exercice 2****(6 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est **vraie** ou **fausse**. Chaque réponse doit être justifiée. L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. **Affirmation 1** : Les points A , B et C définissent un plan.

On considère $A(-1; 0; 5)$, $B(3; 2; -1)$ et $C(1; 1; 2)$.

2. **Affirmation 2** : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

3. **Affirmation 3** : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

On considère la droite $d: \begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$ et la droite $d': \begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = 2 + 4s \\ z = 1 - 6s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}).$

4. **Affirmation 4** : E , F , G et H sont coplanaires.

On considère $E(2; 0; 3)$, $F(0; 2; 1)$, $G(-1; -1; 2)$ et $H(1; 1; 3)$.

Exercice 3**(10 points)**

Partie A On désigne par $\mathcal{C}_1$ la courbe de f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x + e^{-x}$.

1. Justifier que $\mathcal{C}_1$ passe par le point $A(0; 1)$.
2. Déterminer le tableau de variation de f_1 .

Partie B On étudie la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx}) dx$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe de $f_n(x) = x + e^{-nx}$ et $\mathcal{D}$ la droite $x = 1$ (voir figure ci-dessous).

-

- Bon courage !

Corrigé – Devoir Surveillé n° 5

Géométrie dans l'espace — Intégrales

Exercice 1

(4 points)

On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{e}$ les trois arêtes issues de A .

1. a) Montrons que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED} - 3\overrightarrow{EA}$.

Le point G est le sommet opposé à A dans le cube, donc :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.$$

Exprimons chaque vecteur du membre de droite avec la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EB} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}, \\ \overrightarrow{ED} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}, \\ -3\overrightarrow{EA} &= 3\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

En sommant :

$$\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED} - 3\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}.$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED} - 3\overrightarrow{EA}. \quad \checkmark$$

- b) Expression de $\overrightarrow{EM}$ en fonction de $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$.

Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED} - 3\overrightarrow{EA}) = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EA}.$$

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{ED}.$$

2. Conclusion.

Le vecteur $\overrightarrow{EM}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$. Comme $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$ ne sont pas colinéaires (arêtes d'un cube non aplati), le point M appartient au plan défini par les points E , B et D .

Les points E , B , D et M sont coplanaires.

Exercice 2

(6 points)

1. **Affirmation 1** : A , B et C définissent un plan.

Calculons $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (3 - (-1); 2 - 0; -1 - 5) = (4; 2; -6), \quad \overrightarrow{AC} = (1 - (-1); 1 - 0; 2 - 5) = (2; 1; -3).$$

On constate que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$, donc les vecteurs sont colinéaires : les points A , B et C sont **alignés**.

FAUX. Les points A , B , C sont alignés et ne définissent pas un plan.

2. Affirmation 2 : La représentation paramétrique donnée est celle de (AB) .

Le vecteur directeur lu dans la représentation est $\vec{u} = (-2; -1; 3)$.

Or $\vec{AB} = (4; 2; -6) = -2\vec{u}$, donc $\vec{u}$ et $\vec{AB}$ sont bien colinéaires : la direction est correcte.

Pour $t = 0$, on obtient le point $(1; 1; 2) = C$. Comme A, B, C sont alignés (question 1), le point C appartient bien à la droite (AB) .

VRAI. La représentation paramétrique est bien celle de la droite (AB) .

3. Affirmation 3 : d et d' ne sont pas coplanaires.

Deux droites non parallèles sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes. Cherchons si d et d' se coupent.

Les vecteurs directeurs sont $\vec{u} = (1; -1; 2)$ et $\vec{v} = (4; 4; -6)$. Ils ne sont pas colinéaires, donc d et d' ne sont pas parallèles.

Cherchons s'il existe k et s tels que les deux points coïncident :

$$\begin{cases} 15 + k = 1 + 4s \\ 8 - k = 2 + 4s \\ -6 + 2k = 1 - 6s \end{cases}$$

En additionnant les deux premières équations : $23 = 3 + 8s$, d'où $s = \frac{5}{2}$.

La première donne alors : $15 + k = 1 + 10 = 11$, d'où $k = -4$.

Vérification avec la troisième : $-6 + 2(-4) = -14$ et $1 - 6 \times \frac{5}{2} = 1 - 15 = -14$. ✓

Le système admet une solution : les droites se coupent au point $(11; 12; -14)$.

FAUX. Les droites d et d' sont coplanaires (elles sont sécantes).

4. Affirmation 4 : E, F, G, H sont coplanaires.

Étape 1 : Déterminons une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $E(2; 0; 3)$, $F(0; 2; 1)$ et $G(-1; -1; 2)$.

On cherche $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$. Les trois points vérifient cette équation :

$$\begin{cases} 2a + 3c + d = 0 & (E) \\ 2b + c + d = 0 & (F) \\ -a - b + 2c + d = 0 & (G) \end{cases}$$

$(E) - (F)$ donne : $2a - 2b + 2c = 0$, soit $a - b + c = 0$, d'où $a = b - c$.

$(F) - (G)$ donne : $a + 3b - c = 0$, soit en remplaçant a : $(b - c) + 3b - c = 0$, d'où $4b - 2c = 0$, donc $c = 2b$.

On en déduit $a = b - 2b = -b$. En posant $b = 1$: $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$.

Avec (F) : $2(1) + 2 + d = 0$, d'où $d = -4$.

$$\mathcal{P} : -x + y + 2z - 4 = 0.$$

Vérification : $E : -2 + 0 + 6 - 4 = 0$ ✓ ; $F : 0 + 2 + 2 - 4 = 0$ ✓ ; $G : 1 - 1 + 4 - 4 = 0$ ✓.

Étape 2 : Vérifions si $H(1; 1; 3)$ appartient à $\mathcal{P}$:

$$-1 + 1 + 2 \times 3 - 4 = -1 + 1 + 6 - 4 = 2 \neq 0.$$

FAUX. $H \notin \mathcal{P}$, donc les quatre points E, F, G et H ne sont pas coplanaires.

Exercice 3

(10 points)

Partie A

1. $f_1(0) = 0 + e^0 = 1$, donc $\mathcal{C}_1$ passe bien par le point $A(0; 1)$. ✓

2. **Tableau de variation de f_1 .**

$$f_1'(x) = 1 - e^{-x}.$$

$$f_1'(x) = 0 \iff e^{-x} = 1 \iff x = 0.$$

— Pour $x < 0$: $e^{-x} > 1$, donc $f_1'(x) < 0$ (fonction décroissante).

— Pour $x > 0$: $e^{-x} < 1$, donc $f_1'(x) > 0$ (fonction croissante).

La fonction f_1 admet un minimum en $x = 0$, de valeur $f_1(0) = 1$.

Limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = +\infty$ (car $e^{-x} \rightarrow +\infty$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$ (car $x \rightarrow +\infty$).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$		− 0 +	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1. a. **Interprétation géométrique de I_n .**

Comme $f_n(x) = x + e^{-nx} \geq 0$ pour $x \in [0; 1]$, l'intégrale I_n représente l'**aire** du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

b. **Conjecture.**

Sur le graphique, lorsque n augmente, les courbes $\mathcal{C}_n$ se rapprochent de la droite $y = x$ (car $e^{-nx} \rightarrow 0$ pour $x > 0$). L'aire sous $\mathcal{C}_n$ diminue donc avec n .

On conjecture que la suite (I_n) est **décroissante** et que sa limite est $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

2. **Démonstration de la formule et convergence.**

Pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 (x + e^{-(n+1)x}) dx - \int_0^1 (x + e^{-nx}) dx \\ &= \int_0^1 (e^{-(n+1)x} - e^{-nx}) dx \\ &= \int_0^1 e^{-(n+1)x} (1 - e^x) dx. \end{aligned}$$

Vérification : $e^{-(n+1)x} (1 - e^x) = e^{-(n+1)x} - e^{-(n+1)x+x} = e^{-(n+1)x} - e^{-nx}$. ✓

Signe : Pour $x \in [0; 1]$, on a $e^{-(n+1)x} > 0$ et $e^x \geq 1$, donc $1 - e^x \leq 0$.

Ainsi l'intégrande est ≤ 0 , d'où $I_{n+1} - I_n \leq 0$: la suite (I_n) est **décroissante**.

Minoration : Pour tout $x \in [0; 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x + e^{-nx} \geq x$, donc :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx \geq \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

(I_n) est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$, donc elle est **convergente**.

3. **Expression de I_n et limite.**

Cas $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x \, dx + \int_0^1 e^{-nx} \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{n} e^{-n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1 - e^{-n}}{n}. \end{aligned}$$

Vérification pour $n = 0$: $I_0 = \int_0^1 (x + 1) \, dx = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

$$I_n = \frac{1}{2} + \frac{1 - e^{-n}}{n} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Limite : Quand $n \rightarrow +\infty$, $e^{-n} \rightarrow 0$ donc $\frac{1 - e^{-n}}{n} \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{1}{2}.$$

« Les mathématiques sont l'alphabet avec lequel Dieu a écrit l'univers. »

— Galilée
