

Lycée Aljabr — Mission française

Chapitre 12

Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale

Cours de Mathématiques — Terminale

Professeur	Pr. Elakili
Établissement	Lycée Aljabr
Niveau	Terminale
Année scolaire	2025 – 2026

Sommaire

1. Succession d'épreuves indépendantes
2. Épreuve, loi et schéma de Bernoulli
3. Loi binomiale
 - a. Définition et calculs de probabilités
 - b. Espérance, variance et écart-type
 - c. Intervalles de fluctuation
4. Exercices d'application

1 Succession d'épreuves indépendantes

Définition Univers associé à une succession d'épreuves indépendantes

Soit une succession de n épreuves indépendantes dont les univers associés sont respectivement $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$.

L'univers associé à cette succession de n épreuves est le **produit cartésien** $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$.

Si les n épreuves sont identiques (univers Ω), l'univers associé est noté Ω^n .

Exemple : On lance trois dés numérotés de 1 à 4, de 1 à 6, et de 1 à 8. L'univers est $\{1;2;3;4\} \times \{1;2;3;4;5;6\} \times \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$. Le triplet (2;5;7) est une issue possible.

Propriété Probabilité d'une issue

Soit une succession de n épreuves indépendantes. La probabilité d'obtenir l'issue $(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n)$ est :

$$p((x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n)) = p(x_1) \times p(x_2) \times \dots \times p(x_n)$$

Exemple : Avec les trois dés précédents : $p((2;5;7)) = 1/4 \times 1/6 \times 1/8 = 1/192$.

Remarque : Lorsque les épreuves ne sont pas indépendantes (tirage sans remise par exemple), on utilise un **arbre pondéré** pour représenter la situation et calculer les probabilités.

2 Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

Définition Épreuve de Bernoulli

Une expérience aléatoire à **deux issues**, **succès** (noté S) et **échec** (noté E), est dite **épreuve de Bernoulli**.

Exemple : Regarder si un internaute attribue un pouce vert ou non à une vidéo est une épreuve de Bernoulli (deux issues : pouce vert = succès, pas de pouce vert = échec).

Définition Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0 ; 1[$. La loi de la variable aléatoire X telle que :

$$P(X = 0) = 1 - p \quad \text{et} \quad P(X = 1) = p$$

est appelée **loi de Bernoulli de paramètre p** , notée $B(p)$.

Propriété Loi de Bernoulli : espérance, variance et écart-type

Pour X suivant la loi $B(p)$:

- **Espérance** : $E(X) = p$
- **Variance** : $V(X) = p(1 - p)$
- **Écart-type** : $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$

Démonstration : $E(X) = (1-p) \times 0 + p \times 1 = p$. $V(X) = (1-p)(0-p)^2 + p(1-p)^2 = (1-p)p[p + (1-p)] = p(1-p)$.
 $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Définition Schéma de Bernoulli

La **répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes** est appelée **schéma de Bernoulli**.

Exemple : On appelle 5 fois un service téléphonique (probabilité 0,1 de parler à un conseiller). C'est un schéma de Bernoulli avec $n = 5$ et $p = 0,1$.
 La probabilité de l'issue (E;S;E;E;E) est $0,9^4 \times 0,1 = 0,06561$.

Remarque : On représente généralement un schéma de Bernoulli par un arbre pondéré.

3 Loi binomiale

a) Définition et calculs de probabilités

Définition Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0 ; 1[$. On considère un schéma de Bernoulli à n répétitions avec probabilité de succès p .

La loi de la variable aléatoire donnant le **nombre de succès** sur les n répétitions est appelée **loi binomiale de paramètres n et p** , notée **$B(n ; p)$** .

Propriété Probabilités et loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $B(n ; p)$.

Pour tout entier k dans $[0 ; n]$:

$$P(X = k) = C(n, k) \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

où $C(n, k) = n! / [k! \times (n-k)!]$ est le coefficient binomial.

Démonstration : Sur l'arbre du schéma de Bernoulli, chaque chemin à k succès a une probabilité $p^k \times (1-p)^{n-k}$. Le nombre de tels chemins est $C(n, k)$ (nombre de façons de placer k succès parmi n épreuves).

Exemple : On lance 3 fois une pièce ($p = 0,4$). X suit $B(3 ; 0,4)$.

$$P(X = 2) = C(3, 2) \times 0,4^2 \times 0,6^1 = 3 \times 0,16 \times 0,6 = 0,288.$$

Remarque : Pour les calculs, on peut utiliser la formule directement ou les fonctions de la calculatrice (*binomPdf* / *binomCdf*).

Propriété Astuces de calcul avec la loi binomiale

Pour X suivant $B(n ; p)$:

- $P(X < k) = P(X \leq k-1)$
- $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$
- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$

b) Espérance, variance et écart-type

Propriété Loi binomiale : espérance, variance et écart-type

Pour X suivant la loi $B(n ; p)$:

- **Espérance** : $E(X) = n \times p$
- **Variance** : $V(X) = n \times p \times (1 - p)$
- **Écart-type** : $\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1 - p)}$

Exemple : X suit $B(20 ; 0,6)$: $E(X) = 20 \times 0,6 = 12$, $V(X) = 20 \times 0,6 \times 0,4 = 4,8$, $\sigma(X) = \sqrt{4,8} \approx 2,19$.

Propriété Forme du diagramme en barres

Le diagramme en barres de X suivant $B(n ; p)$ a une **forme de cloche**, approximativement **centré sur $E(X)$** .

Plus p est éloigné de 0,5, plus l'écart-type est petit et la cloche est « étroite et haute ».

Remarque : Plus l'écart-type est petit, plus les valeurs proches de l'espérance sont probables.

c) Intervalles de fluctuation

Définition Intervalle de fluctuation

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale, $\alpha \in]0 ; 1[$ et a, b réels.

Un intervalle $[a ; b]$ tel que $P(a \leq X \leq b) \geq 1 - \alpha$ est appelé **intervalle de fluctuation au seuil de $1 - \alpha$** (ou au risque α) associé à X .

Exemple : X suit $B(43 ; 0,2)$ et $\alpha = 0,05$. On a $P(X \leq 13) \approx 0,964 \geq 0,95$, donc $[0 ; 13]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

Propriété Intervalle de fluctuation centré

Si $P(X < a) \leq \alpha/2$ et $P(X > b) \leq \alpha/2$, alors $[a ; b]$ est un **intervalle de fluctuation centré** (ou bilatéral) au seuil de $1 - \alpha$.

Exemple : X suit $B(43 ; 0,2)$, $\alpha = 0,05$ ($\alpha/2 = 0,025$). On a $P(X < 4) \approx 0,018 < 0,025$ et $P(X > 14) \approx 0,016 < 0,025$, donc $[4 ; 14]$ est un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 %.

Propriété Intervalle de fluctuation centré particulier (méthode pratique)

L'intervalle $[a ; b]$ tel que a et b soient les **plus petits entiers** vérifiant :

- $P(X \leq a) > \alpha/2$
- $P(X \leq b) \geq 1 - \alpha/2$

est un intervalle de fluctuation centré au seuil de $1 - \alpha$ associé à X .

Remarque : C'est cette méthode que l'on utilise en pratique avec la calculatrice.

4 Exercices d'application

Exercice 1 — Succession d'épreuves indépendantes

On tire avec remise six personnes dans une population contenant 87 % de droitiers (D), 12 % de gauchers (G) et 1 % d'ambidextres (A).

1. Donner l'univers associé à cette succession de six épreuves indépendantes.
2. Calculer la probabilité de l'issue (D ; D ; G ; D ; D ; A).

Indication : utiliser le produit cartésien pour l'univers et la multiplication des probabilités pour l'issue.

Exercice 2 — Schéma de Bernoulli

On lance 3 fois successivement une pièce truquée telle que la probabilité d'obtenir PILE est 0,75.

1. Justifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli. Préciser n et p .
2. Représenter ce schéma par un arbre pondéré.
3. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois PILE.

Indication : identifier succès = PILE, compter les chemins à 1 succès, appliquer la formule.

Exercice 3 — Reconnaître et utiliser la loi binomiale

Une urne contient 9 boules rouges et 1 verte. On tire 11 boules avec remise. Soit V la variable aléatoire donnant le nombre de boules vertes obtenues.

1. Donner la loi de V .
2. Calculer $P(V = 2)$.

Indication : identifier les paramètres n et p , puis appliquer $P(X=k) = C(n,k) \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.

Exercice 4 — Calculs de probabilités

X suit la loi binomiale $B(50 ; 0,23)$. Calculer :

- a) $P(X < 12)$ b) $P(X \geq 4)$ c) $P(5 < X \leq 8)$.

Indication : a) transformer en $P(X \leq 11)$; b) utiliser le complémentaire ; c) $P(X \leq 8) - P(X \leq 5)$.

Exercice 5 — Espérance et écart-type

On lance 20 fois une pièce équilibrée. Soit X le nombre de FACE obtenus.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2. Calculer $P(X = 11)$.
3. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Indication : $n = 20$, $p = 0,5$. Utiliser les formules $E = np$, $V = np(1-p)$.

Exercice 6 — Intervalle de fluctuation

Sylvain joue 5 fois de suite à un jeu vidéo avec une probabilité de succès de 0,1 pour chaque partie. On suppose les parties indépendantes.

1. Quelle est la probabilité qu'il perde les 5 parties ?
2. Soit X le nombre de parties gagnées. Donner la loi de X .
3. Calculer $P(X \geq 1)$.

Indication : 1) c'est $P(X = 0)$; 3) utiliser le complémentaire.

Exercice 7 — Problème de synthèse

Gloria tient une librairie. Quand un client entre, la probabilité qu'il achète un livre est 0,67. Les achats sont indépendants. Quatre clients entrent dans la librairie.

1. Justifier que la situation correspond à un schéma de Bernoulli. Préciser n et p .
2. Soit X le nombre de clients qui achètent un livre. Quelle est la loi de X ?
3. Calculer $P(X = 2)$.
4. Calculer $E(X)$ et interpréter ce résultat.

Indication : X suit $B(4 ; 0,67)$. Pour $P(X = 2)$: $C(4,2) = 6$, puis appliquer la formule. $E(X) = np$.

Exercice 8 — Intervalle de fluctuation centré

X suit la loi $B(30 ; 0,85)$.

1. Calculer $P(Y < 24)$ et $P(21 < Y < 25)$.
2. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Déterminer l'intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % à l'aide de la calculatrice.

Indication : utiliser les fonctions `binomCdf` de la calculatrice. Pour l'intervalle centré, chercher a et b tels que $P(X \leq a) > 0,025$ et $P(X \leq b) \geq 0,975$.