BAC BLANC

Avril 2026

Préparation Bac Blanc n°1

⋆⋆ Niveau : Moyen ⋆⋆

Mathématiques — Enseignement de spécialité

Durée : 4 heures • Calculatrice autorisée (mode examen)

Lycée Al Jabr – Oasis

Pr. Abdelfattah ELAKILI

Agrégé de Mathématiques

Le génie est fait d'un pour cent d'inspiration et de quatre-vingt-dix-neuf pour cent de transpiration.

— *Thomas Edison*

Conseil : Commencez par les questions que vous maîtrisez le mieux. Chaque point compte — ne laissez rien au hasard !

Les exercices sont issus d'annales officielles du baccalauréat 2024–2025

Exercice 1 — Fonctions (4 points)

Source : Baccalauréat Amérique du Nord, 22 mai 2024

Soit a un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

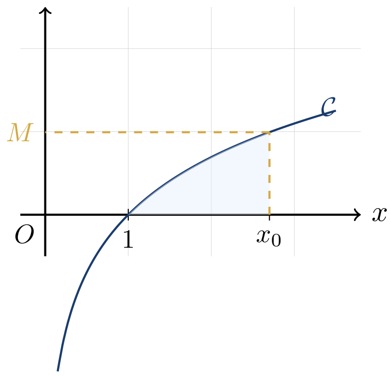
$$f(x) = a\ln(x).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

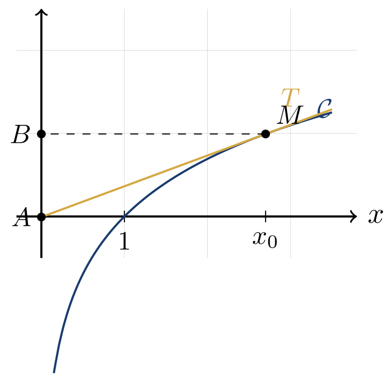
1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.

2. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a\big[x\ln(x) - x\big]$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

3. En déduire l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$, en fonction de a et de x_0.



On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point M d'abscisse x_0.
On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera.

   Le candidat prendra soin d'expliciter sa démarche.

Exercice 2 — Suites (6 points)

Source : Baccalauréat Centres Étrangers, 13 juin 2025

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.
Au 1er janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 0,93.

Pour tout entier naturel n, u_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 6 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad v_{n+1} = -0{,}05\, v_n^2 + 1{,}1\, v_n.$$

Pour tout entier naturel n, v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x.$$

2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;11]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6.$$

4. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ.
5. **a.** Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ.

   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.
3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.

4. On considère le programme Python ci-contre. Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.

```
n = 0
u = 6
v = 6
while ... :
    u = ...
    v = ...
    n = n + 1
print(2025 + n)
```

a. Recopier et compléter le programme.

b. Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

Exercice 3 — Géométrie dans l'espace (4 points)

Source : Baccalauréat Centres Étrangers, 13 juin 2025

On se place dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ de l'espace.
On considère les points $A(1\,;0\,;3)$, $B(-2\,;1\,;2)$ et $C(0\,;3\,;2)$.

1. **a.** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$.

Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).

c. En déduire que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :

$$-x+y+4z-11=0.$$

On considère le plan P d'équation cartésienne $3x-3y+2z-9=0$ et le plan P' d'équation cartésienne $x-y-z+2=0$.

2. **a.** Démontrer que les plans P et P' sont sécants. On note (d) leur droite d'intersection.

b. Déterminer si les plans P et P' sont perpendiculaires.

3. Montrer que la droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

4. Montrer que le point $M(2\,;1\,;3)$ appartient aux plans P et P'. En déduire une représentation paramétrique de la droite (d).

5. Montrer que la droite (d) est aussi incluse dans le plan (ABC).

Que peut-on dire des trois plans (ABC), P et P' ?

Exercice 4 — Probabilités (5 points)

Source : Baccalauréat Amérique du Nord (secours), 22 mai 2025

Dans cet exercice, les réponses seront arrondies à 10^{-4} près.

Durant la saison hivernale, la circulation d'un virus a entraîné la contamination de $2\,\%$ de la population d'un pays. Dans ce pays, $90\,\%$ de la population a été vaccinée contre ce virus.

On constate que $62\,\%$ des personnes contaminées avaient été vaccinées.

On interroge au hasard une personne, et on note les évènements suivants :

- C : la personne a été contaminée ;
- V : la personne a été vaccinée.

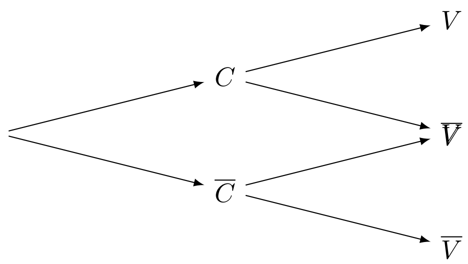
Les évènements contraires des évènements C et V sont notés respectivement $\overline{C}$ et $\overline{V}$.

1. À partir de l'énoncé, donner, sans calcul, les probabilités $P(C)$, $P(V)$ et la probabilité conditionnelle $P_C(V)$.

2. **a.** Calculer $P(C\cap V)$.

b. En déduire $P\left(C\cap\overline{V}\right)$.

3. Recopier l'arbre des probabilités ci-dessous et le compléter.



4. Calculer $P_V(C)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.

   a. Parmi les personnes non contaminées, il y a dix fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées.

   b. Plus de 98 % de la population vaccinée n'a pas été contaminée.

6. On s'intéresse à un échantillon de 20 personnes choisies au hasard dans la population.

   La population du pays est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce choix à des tirages successifs avec remise.

   On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de personnes contaminées.

   On rappelle que, pour une personne choisie au hasard, la probabilité d'être contaminée est $p = 0{,}02$.

   a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Justifier et donner ses paramètres.

   b. Calculer, en rappelant la formule, la probabilité que 4 personnes exactement soient contaminées dans ce groupe de 20 personnes.

CORRIGÉ

Bac Blanc n°1 — Niveau Moyen — Avril 2026

Mathématiques — Enseignement de spécialité

Lycée Al Jabr – Oasis

Pr. Abdelfattah ELAKILI — Agrégé de Mathématiques

L'erreur est humaine, mais la correction est divine.

— Alexander Pope

Corrigé — Exercice 1 : Fonctions (4 pts)

1. $f(x) = 0 \iff a\ln(x) = 0 \iff \ln(x) = 0$ (car $a > 0$) $\iff x = 1$. Le point d'intersection avec l'axe des abscisses a pour abscisse $\boxed{1}$.

2. $F(x) = a[x\ln(x) - x]$. On dérive : $F'(x) = a[\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1] = a[\ln(x) + 1 - 1] = a\ln(x) = f(x)$. Donc F est bien une primitive de f. ✓

3. Pour $x_0 > 1$, $f(x) = a\ln(x) \geqslant 0$ sur $[1; x_0]$, donc :

$$\mathcal{A} = \int_1^{x_0} a\ln(x)\,\mathrm{d}x = F(x_0) - F(1) = a[x_0\ln(x_0) - x_0] - a[0 - 1] = a[x_0\ln(x_0) - x_0 + 1].$$

4. $f'(x) = \frac{a}{x}$, donc $f'(x_0) = \frac{a}{x_0}$. L'équation de la tangente T au point $M(x_0; a\ln(x_0))$ est :

$$y = \frac{a}{x_0}(x - x_0) + a\ln(x_0) = \frac{a}{x_0}x - a + a\ln(x_0).$$

Le point A est l'intersection de T avec l'axe des ordonnées ($x = 0$) : $A(0; -a + a\ln(x_0))$.
Le point B est le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées : $B(0; a\ln(x_0))$.
Donc $AB = |a\ln(x_0) - (-a + a\ln(x_0))| = |a| = a$ (car $a > 0$). La longueur AB est égale à la constante $\boxed{a}$, indépendante de x_0.

Corrigé — Exercice 2 : Suites (6 pts)

Partie A

1. $u_1 = 6 \times 0{,}93 = 5{,}58$, soit 5 580 individus au 1er janvier 2026.

2. (u_n) géométrique de raison 0,93 et premier terme $u_0 = 6$: $u_n = 6 \times 0{,}93^n$.

3. $0 < 0{,}93 < 1$ donc $0{,}93^n \to 0$, d'où $\lim u_n = 0$. La population du milieu A s'éteint à long terme.

Partie B

1. $v_1 = -0{,}05 \times 36 + 1{,}1 \times 6 = -1{,}8 + 6{,}6 = 4{,}8$, soit 4 800 individus.

2. $f'(x) = -0{,}1x + 1{,}1$. $f'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant 11$. Donc f est croissante sur $[0; 11]$.

3. *Initialisation* : $v_0 = 6$ et $v_1 = 4{,}8$. On vérifie $2 \leqslant 4{,}8 \leqslant 6 \leqslant 6$. ✓

Hérédité : Supposons $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$. Comme f est croissante sur $[0; 11]$ et $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6 \subset [0; 11]$:

$$f(2) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n) \leqslant f(6).$$

Or $f(2) = -0{,}2 + 2{,}2 = 2$ et $f(6) = -1{,}8 + 6{,}6 = 4{,}8 \leqslant 6$. Donc $2 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 6$. ✓

4. (v_n) est décroissante (car $v_{n+1} \leqslant v_n$) et minorée par 2 : elle converge.

5.a. Par continuité de f, $\ell = f(\ell) = -0{,}05\ell^2 + 1{,}1\ell$. Donc $0{,}05\ell^2 - 0{,}1\ell = 0$, soit $\ell(0{,}05\ell - 0{,}1) = 0$. $\ell = 0$ ou $\ell = 2$. Comme $v_n \geqslant 2$ pour tout n, $\ell = 2$.

5.b. La population du milieu B se stabilise à 2 000 individus.

Partie C

1. $u_n < 3 \iff 6 \times 0{,}93^n < 3 \iff 0{,}93^n < 0{,}5 \iff n > \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}93} \approx 9{,}55$. Donc à partir de l'année $2025 + 10 = \boxed{2035}$.

2. On calcule : $v_9 \approx 3{,}06 > 3$ et $v_{10} \approx 2{,}93 < 3$. Donc à partir de $\boxed{2035}$ également.

3. $\lim u_n = 0$ et $\lim v_n = 2$. Comme $0 < 2$, à partir d'un certain rang $v_n > u_n$.

4.a. `while u >= v, u = 0.93*u, v = -0.05*v**2 + 1.1*v`. **4.b.** L'année affichée est $\boxed{2038}$.

Corrigé — Exercice 3 : Géométrie (4 pts)

1.a. $\overrightarrow{AB} = (-3; 1; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 3; -1)$. $\frac{-3}{-1} \neq \frac{1}{3}$: non colinéaires, donc A, B, C non alignés.

1.b. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 + 1 - 4 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 + 3 - 4 = 0$. Deux vecteurs non colinéaires du plan, donc $\vec{n}$ est normal à (ABC). ✓

1.c. Équation : $-x + y + 4z + d = 0$. $A(1; 0; 3)$: $-1 + 0 + 12 + d = 0$, $d = -11$. D'où $-x + y + 4z - 11 = 0$.

2.a. $\vec{n}_P = (3; -3; 2)$ et $\vec{n}_{P'} = (1; -1; -1)$. $\frac{3}{1} = 3$, $\frac{-3}{-1} = 3$, $\frac{2}{-1} = -2 \neq 3$: non proportionnels, donc P et P' sont sécants.

2.b. $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_{P'} = 3 \times 1 + (-3)(-1) + 2 \times (-1) = 3 + 3 - 2 = 4 \neq 0$: les plans ne sont **pas perpendiculaires**.

3. $\vec{u} = (1; 1; 0)$. $\vec{n}_P \cdot \vec{u} = 3 - 3 + 0 = 0$ et $\vec{n}_{P'} \cdot \vec{u} = 1 - 1 + 0 = 0$. Donc $\vec{u}$ est orthogonal aux deux normales : il dirige (d).

4. $M(2; 1; 3)$: P : $6 - 3 + 6 - 9 = 0$ ✓. P' : $2 - 1 - 3 + 2 = 0$ ✓. Donc $M \in P \cap P'$.

$$(d) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

5. Vérifions que tout point de (d) est dans (ABC) : $-(2+t)+(1+t)+4\times3-11 = -2-t+1+t+12-11 = 0$. ✓ pour tout t.

Conclusion : les trois plans (ABC), P et P' sont sécants deux à deux et admettent la même droite d'intersection (d).

Corrigé — Exercice 4 : Probabilités (5 pts)

1. $P(C) = 0{,}02$, $P(V) = 0{,}90$, $P_C(V) = 0{,}62$.

2.a. $P(C \cap V) = P(C) \times P_C(V) = 0{,}02 \times 0{,}62 = 0{,}0124$.

2.b. $P(C \cap \overline{V}) = P(C) - P(C \cap V) = 0{,}02 - 0{,}0124 = 0{,}0076$.

3. On complète l'arbre. $P(\overline{C}) = 0{,}98$. $P(\overline{C} \cap V) = P(V) - P(C \cap V) = 0{,}90 - 0{,}0124 = 0{,}8876$. $P_{\overline{C}}(V) = \frac{0{,}8876}{0{,}98} \approx 0{,}9057$. $P_{\overline{C}}(\overline{V}) \approx 0{,}0943$.

4. $P_V(C) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{0{,}0124}{0{,}90} \approx 0{,}0138$. Parmi les vaccinés, environ $1{,}4\,\%$ ont été contaminés.

5.a. $P_{\overline{C}}(V) = \frac{0{,}8876}{0{,}98} \approx 0{,}9057$ et $P_{\overline{C}}(\overline{V}) = \frac{0{,}0924}{0{,}98} \approx 0{,}0943$. $\frac{0{,}9057}{0{,}0943} \approx 9{,}6 < 10$: **Faux**, il n'y a pas *exactement* dix fois plus.

5.b. $P_V(\overline{C}) = 1 - P_V(C) = 1 - 0{,}0138 = 0{,}9862 \approx 98{,}6\,\% > 98\,\%$: **Vrai**.

6.a. 20 tirages indépendants, $p = 0{,}02$ constant : $X \sim \mathcal{B}(20; 0{,}02)$.

6.b. $P(X = 4) = \binom{20}{4}(0{,}02)^4(0{,}98)^{16} = 4845 \times (0{,}02)^4 \times (0{,}98)^{16} \approx 0{,}0006$.