BAC BLANC

Avril 2026

Préparation Bac Blanc n°3

⋆⋆⋆⋆ Niveau : Difficile ⋆⋆⋆⋆

Mathématiques — Enseignement de spécialité

Durée : 4 heures • Calculatrice autorisée (mode examen)

Lycée Al Jabr – Oasis

Pr. Abdelfattah ELAKILI

Agrégé de Mathématiques

Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles que nous n'osons pas, c'est parce que nous n'osons pas qu'elles sont difficiles.

— *Sénèque*

Avertissement : Ce sujet est conçu pour les élèves visant l'excellence. Les questions de recherche et les démonstrations avancées sont valorisées. Courage et persévérance !

Exercices issus d'annales officielles 2024–2025

Exercice 1 — Fonctions et équation différentielle (6 points)

Source : Baccalauréat Métropole, 18 juin 2025

L'objet de cet exercice est l'étude de l'arrêt d'un chariot sur un manège, à partir du moment où il entre dans la zone de freinage en fin de parcours.

On note t le temps écoulé, exprimé en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.

On modélise la vitesse instantanée du chariot, en mètre par seconde (m.s^{-1}), en fonction de t, par une fonction v définie sur $[0\,;+\infty[$.

On admet que :

- la fonction v est dérivable sur son ensemble de définition, et on note v' sa fonction dérivée ;
- la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0{,}6y = \mathrm{e}^{-0{,}6t},$$

où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y.

On précise de plus que, lors de son arrivée sur la zone de freinage, la vitesse du chariot est égale à $12\ \text{m.s}^{-1}$, c'est-à-dire $v(0) = 12$.

1. **a.** On considère l'équation différentielle (E') : $y' + 0{,}6y = 0$.
Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') sur $[0\,;+\infty[$.

b. Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = t\mathrm{e}^{-0{,}6t}$.
Vérifier que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E).

c. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0\,;+\infty[$.

d. En déduire que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on a :

$$v(t) = (12 + t)\mathrm{e}^{-0{,}6t}.$$

2. Dans cette question, on étudie la fonction v sur $[0\,;+\infty[$.

a. Montrer que pour tout réel $t \in [0\,;+\infty[$: $v'(t) = (-6{,}2 - 0{,}6t)\mathrm{e}^{-0{,}6t}$.

b. Déterminer la limite de v en $+\infty$.

c. Étudier le sens de variation de la fonction v et dresser son tableau de variation complet. Justifier.

d. Montrer que l'équation $v(t) = 1$ admet une solution unique α, dont on donnera une valeur approchée au dixième.

3. Lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde, un système mécanique se déclenche permettant son arrêt complet. Déterminer au bout de combien de temps ce système entre en action. Justifier.

On rappelle que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$: $v(t) = (12 + t)\mathrm{e}^{-0{,}6t}$.

On admet que pour tout réel t dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$: $d(t) = \displaystyle\int_0^t v(x)\,\mathrm{d}x$.

4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la distance parcourue par le chariot entre les instants 0 et t est donnée par :

$$d(t) = \mathrm{e}^{-0{,}6t}\left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9}\right) + \frac{205}{9}.$$

5. Déterminer, selon ce modèle, une valeur approchée au centième de la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage avant le déclenchement du dispositif.

Exercice 2 — Suites (5 points)

Source : Baccalauréat Amérique du Nord (secours), 22 mai 2025

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}\,u_n.$$

Partie A : Conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			

2. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

1. Calculer w_0.

2. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3. Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\,u_n.$$

5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.

3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.

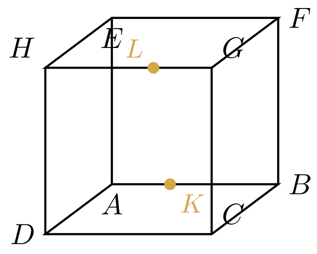
Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 — Géométrie dans l'espace (5 points)

Source : Baccalauréat Polynésie, 5 septembre 2024

On considère un cube ABCDEFGH et l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.
Pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, on considère les points K et L de coordonnées :

$$K(m\,;0\,;0) \quad \text{et} \quad L(1-m\,;1\,;1).$$



1. Donner les coordonnées des points E et C dans ce repère.

2. Dans cette question, $m=0$. Ainsi, le point $L(1\,;1\,;1)$ est confondu avec le point G, le point $K(0\,;0\,;0)$ est confondu avec le point A et le plan (LEK) est donc le plan (GEA).

a. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est normal au plan (GEA).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (GEA).

On s'intéresse désormais à la nature de $CKEL$ en fonction du paramètre m.

3. Dans cette question, m est un réel quelconque de l'intervalle $[0\,;1]$.

a. Démontrer que $CKEL$ est un parallélogramme.

b. Justifier que $\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{KE}=m(m-1)$.

c. Démontrer que $CKEL$ est un rectangle si, et seulement si, $m=0$ ou $m=1$.

4. Dans cette question, $m=\dfrac{1}{2}$. Ainsi, L a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;1\,;1\right)$ et K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;0\right)$.

a. Démontrer que le parallélogramme $CKEL$ est alors un losange.

b. À l'aide de la question 3.b., déterminer une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{CKE}$.

Exercice 4 — Probabilités et fonctions (5 points)

Source : Baccalauréat Centres Étrangers, 5 juin 2024

Partie A

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = \frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03}.$$

1. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$:

$$f'(x) = \frac{0{,}0288}{(0{,}93x + 0{,}03)^2}.$$

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Partie B

La lutte contre le dopage passe notamment par la réalisation de contrôles antidopage qui visent à déterminer si un sportif a fait usage de substances interdites.

Lors d'une compétition rassemblant 1 000 sportifs, une équipe médicale teste tous les concurrents. On propose d'étudier la fiabilité de ce test.

On appelle x le réel compris entre 0 et 1 qui désigne la proportion de sportifs dopés.

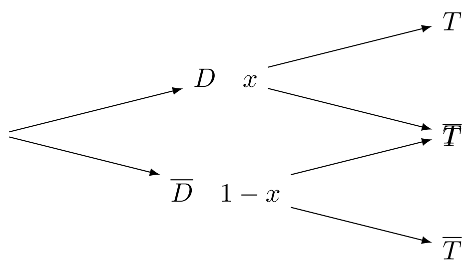
Lors de l'élaboration de ce test, on a pu déterminer que :

- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il est dopé est égale à 0,96 ;
- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il n'est pas dopé est égale à 0,03.

On note :

- D l'évènement : le sportif est dopé ;
- T l'évènement : le test est positif.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



2. Déterminer, en fonction de x, la probabilité qu'un sportif soit dopé et ait un test positif.

3. Démontrer que la probabilité de l'évènement T est égale à $0{,}93x + 0{,}03$.

4. Pour cette question uniquement, on suppose qu'il y a 50 sportifs dopés parmi les 1 000 testés.

La fonction f désigne la fonction définie à la partie A.

Démontrer que la probabilité qu'un sportif soit dopé sachant que son test est positif est égale à $f(0{,}05)$. En donner une valeur arrondie au centième.

5. On appelle *valeur prédictive positive* d'un test la probabilité que le sportif soit réellement dopé lorsque le résultat du test est positif.

a. Déterminer à partir de quelle valeur de x la valeur prédictive positive du test étudié sera supérieure ou égale à 0,9. Arrondir le résultat au centième.

b. Un responsable de la compétition décide de ne plus tester l'ensemble des sportifs, mais de cibler les sportifs les plus performants supposés être plus fréquemment dopés.
Quelle est la conséquence de cette décision sur la valeur prédictive positive du test ?
Argumenter en utilisant un résultat de la partie A.

CORRIGÉ

Bac Blanc n°3 — Niveau Difficile — Avril 2026

Mathématiques — Enseignement de spécialité

Lycée Al Jabr – Oasis

Pr. Abdelfattah ELAKILI — Agrégé de Mathématiques

En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue.

— John von Neumann

Corrigé — Exercice 1 : Fonctions et éq. diff. (6 pts)

1.a. Les solutions de (E') : $y' + 0{,}6y = 0$ sont $y(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}6t}$, $C \in \mathbb{R}$.
1.b. $g(t) = t\mathrm{e}^{-0{,}6t}$. $g'(t) = \mathrm{e}^{-0{,}6t} - 0{,}6t\mathrm{e}^{-0{,}6t} = (1-0{,}6t)\mathrm{e}^{-0{,}6t}$.
$g'(t) + 0{,}6g(t) = (1-0{,}6t)\mathrm{e}^{-0{,}6t} + 0{,}6t\mathrm{e}^{-0{,}6t} = \mathrm{e}^{-0{,}6t}$. Donc g est solution de (E). ✓
1.c. Les solutions de (E) sont de la forme $y(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}6t} + t\mathrm{e}^{-0{,}6t} = (C+t)\mathrm{e}^{-0{,}6t}$, $C \in \mathbb{R}$.
1.d. $v(0) = 12$: $(C+0)\mathrm{e}^0 = C = 12$. Donc $v(t) = (12+t)\mathrm{e}^{-0{,}6t}$.

2.a. $v'(t) = \mathrm{e}^{-0{,}6t} + (-0{,}6)(12+t)\mathrm{e}^{-0{,}6t} = \mathrm{e}^{-0{,}6t}[1 - 0{,}6(12+t)] = \mathrm{e}^{-0{,}6t}(1 - 7{,}2 - 0{,}6t) = (-6{,}2 - 0{,}6t)\mathrm{e}^{-0{,}6t}$.
2.b. $v(t) = (12+t)\mathrm{e}^{-0{,}6t}$. $12 + t \to +\infty$ et $\mathrm{e}^{-0{,}6t} \to 0$. Par croissances comparées, $\lim_{t\to+\infty} v(t) = 0$.
2.c. $v'(t) = (-6{,}2 - 0{,}6t)\mathrm{e}^{-0{,}6t}$. $\mathrm{e}^{-0{,}6t} > 0$ et $-6{,}2 - 0{,}6t < 0$ pour tout $t \geqslant 0$. Donc $v'(t) < 0$: v est **strictement décroissante** sur $[0; +\infty[$. $v(0) = 12$ et $\lim_{+\infty} v = 0$.
2.d. v continue, strictement décroissante de 12 vers 0. Comme $0 < 1 < 12$, par le TVI, l'équation $v(t) = 1$ admet une unique solution α. On calcule : $v(4{,}7) = (16{,}7)\mathrm{e}^{-2{,}82} \approx 0{,}995$ et $v(4{,}6) = (16{,}6)\mathrm{e}^{-2{,}76} \approx 1{,}046$. Donc $\alpha \approx 4{,}7$.
3. Le système se déclenche quand $v(t) \leqslant 1$, c'est-à-dire pour $t \geqslant \alpha \approx 4{,}7$ secondes.
4. IPP sur $\int_0^t (12+x)\mathrm{e}^{-0{,}6x}\,\mathrm{d}x$. $u = 12 + x$, $v' = \mathrm{e}^{-0{,}6x}$: $u' = 1$, $v = -\frac{5}{3}\mathrm{e}^{-0{,}6x}$.

$$\begin{aligned}
d(t) &= \left[-\frac{5}{3}(12+x)\mathrm{e}^{-0{,}6x}\right]_0^t + \frac{5}{3}\int_0^t \mathrm{e}^{-0{,}6x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{5}{3}(12+t)\mathrm{e}^{-0{,}6t} + \frac{5}{3}\times 12 + \frac{5}{3}\left[-\frac{5}{3}\mathrm{e}^{-0{,}6x}\right]_0^t \\
&= -\frac{5}{3}(12+t)\mathrm{e}^{-0{,}6t} + 20 - \frac{25}{9}\mathrm{e}^{-0{,}6t} + \frac{25}{9} \\
&= \mathrm{e}^{-0{,}6t}\left(-\frac{5}{3}t - 20 - \frac{25}{9}\right) + 20 + \frac{25}{9} \\
&= \mathrm{e}^{-0{,}6t}\left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9}\right) + \frac{205}{9}. \quad ✓
\end{aligned}$$

5. Pour $t = \alpha \approx 4{,}7$: $d(4{,}7) = \mathrm{e}^{-2{,}82}\left(-\frac{5}{3}\times 4{,}7 - \frac{205}{9}\right) + \frac{205}{9}$
$= \mathrm{e}^{-2{,}82}(-7{,}833 - 22{,}778) + 22{,}778 \approx 0{,}0596 \times (-30{,}611) + 22{,}778 \approx -1{,}824 + 22{,}778 \approx 20{,}95$ m.
La distance parcourue avant déclenchement est d'environ $\boxed{20{,}95}$ mètres.

Corrigé — Exercice 2 : Suites (5 pts)

Partie A

1. $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2}$. $u_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$. $u_4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$. $u_5 = \frac{1}{4} - \frac{3}{32} = \frac{5}{32}$.
2. La suite semble décroissante (après $n = 1$) et tendre vers 0.

Partie B

1. $w_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.
2. $w_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}w_n$.
Donc (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. ✓
3. $w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
4. $w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, d'où $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$. ✓
5. Montrons par récurrence que $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Init. : $u_0 = 0 \times 1 = 0$ ✓ et $u_1 = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓.
Héréd. : Supposons $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Alors :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\times n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \quad ✓$$

Partie C

1. Pour $n \geqslant 2$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)(1/2)^{n+1}}{n(1/2)^n} = \frac{n+1}{2n}$. Pour $n \geqslant 2$: $\frac{n+1}{2n} \leqslant 1 \iff n+1 \leqslant 2n \iff n \geqslant 1$. Comme $u_n > 0$ pour $n \geqslant 1$, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$: (u_n) est décroissante à partir de $n = 1$.

2. (u_n) décroissante à partir du rang 1 et minorée par 0 : elle converge.

3. $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell \iff \frac{1}{4}\ell = 0 \iff \ell = 0$. La suite converge vers $\boxed{0}$.

Corrigé — Exercice 3 : Géométrie (5 pts)

1. $E = (0;0;1)$ et $C = (1;1;0)$.

2.a. $m = 0$: $K = A = (0;0;0)$, $L = G = (1;1;1)$. $\overrightarrow{GE} = (0;0;1) - (1;1;1) = (-1;-1;0)$, $\overrightarrow{GA} = (0;0;0) - (1;1;1) = (-1;-1;-1)$.

$\overrightarrow{DB} = (1;0;0) - (0;1;0) = (1;-1;0)$. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{GE} = -1 + 1 + 0 = 0$ et $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{GA} = -1 + 1 + 0 = 0$.

Deux vecteurs non colinéaires du plan orthogonaux à $\overrightarrow{DB}$: donc $\overrightarrow{DB}$ est normal à (GEA). ✓

2.b. Équation : $x - y + d = 0$. $A(0;0;0)$: $d = 0$. D'où $\boxed{x - y = 0}$.

3.a. $\overrightarrow{KC} = (1-m;1;0)$ et $\overrightarrow{EL} = (1-m;1;0)$. Donc $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{EL}$: $CKEL$ est un parallélogramme.

3.b. $\overrightarrow{KC} = (1-m;1;0)$, $\overrightarrow{KE} = (-m;0;1)$.

$\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = (1-m)(-m) + 1 \times 0 + 0 \times 1 = -m + m^2 = m(m-1)$. ✓

3.c. $CKEL$ est un rectangle $\iff \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = 0 \iff m(m-1) = 0 \iff m = 0$ ou $m = 1$. ✓

4.a. Pour $m = \frac{1}{2}$: $K = (\frac{1}{2};0;0)$, $C = (1;1;0)$, $E = (0;0;1)$, $L = (\frac{1}{2};1;1)$.

$KC = \sqrt{(1/2)^2 + 1 + 0} = \sqrt{5/4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $KE = \sqrt{(1/2)^2 + 0 + 1} = \sqrt{5/4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Parallélogramme avec deux côtés consécutifs égaux : c'est un **losange**. ✓

4.b. $\cos(\widehat{CKE}) = \frac{\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE}}{KC \times KE} = \frac{m(m-1)}{5/4} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{5/4} = \frac{-1/4}{5/4} = -\frac{1}{5}$.

$\widehat{CKE} = \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) \approx 101{,}5 \approx \boxed{102}$.

Corrigé — Exercice 4 : Probabilités et fonctions (5 pts)

Partie A

1. $f(x) = \frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03}$. Dérivons (quotient) :

$$f'(x) = \frac{0{,}96(0{,}93x + 0{,}03) - 0{,}96x \times 0{,}93}{(0{,}93x + 0{,}03)^2} = \frac{0{,}8928x + 0{,}0288 - 0{,}8928x}{(0{,}93x + 0{,}03)^2} = \frac{0{,}0288}{(0{,}93x + 0{,}03)^2}. \quad ✓$$

2. $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0;1]$: f est **strictement croissante**.

Partie B

1. Arbre : $P(D) = x$, $P(\overline{D}) = 1 - x$. $P_D(T) = 0{,}96$, $P_D(\overline{T}) = 0{,}04$. $P_{\overline{D}}(T) = 0{,}03$, $P_{\overline{D}}(\overline{T}) = 0{,}97$.

2. $P(D \cap T) = x \times 0{,}96 = 0{,}96x$.

3. $P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T) = 0{,}96x + (1-x) \times 0{,}03 = 0{,}96x + 0{,}03 - 0{,}03x = 0{,}93x + 0{,}03$.

4. Pour $x = 0{,}05$: $P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}96 \times 0{,}05}{0{,}93 \times 0{,}05 + 0{,}03} = \frac{0{,}048}{0{,}0465 + 0{,}03} = \frac{0{,}048}{0{,}0765}$. Or $f(0{,}05) = \frac{0{,}96 \times 0{,}05}{0{,}93 \times 0{,}05 + 0{,}03} = \frac{0{,}048}{0{,}0765} \approx 0{,}63$. ✓

5.a. $f(x) \geqslant 0{,}9 \iff \frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03} \geqslant 0{,}9 \iff 0{,}96x \geqslant 0{,}9(0{,}93x + 0{,}03) = 0{,}837x + 0{,}027$

$\iff 0{,}123x \geqslant 0{,}027 \iff x \geqslant \frac{0{,}027}{0{,}123} \approx 0{,}22$.

La valeur prédictive positive dépasse 0,9 dès que la proportion de dopés est $\geqslant 22\,\%$.

5.b. En ciblant les sportifs les plus performants, on augmente x (proportion de dopés dans le groupe testé). Comme f est strictement croissante (partie A), la valeur prédictive positive $f(x)$ augmente. Le test devient donc plus fiable (moins de faux positifs en proportion).