BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

MATHÉMATIQUES

BAC BLANC

14 AVRIL 2026

8h-12h

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : 5 points

Un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.

Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :

. si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac ;

. si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

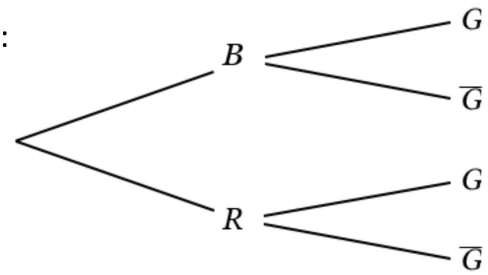
1. Un joueur fait une partie et on note :

- B l´événement « la case obtenue est blanche » ;
- R l'événement « la case obtenue est rouge » ;
- G l'événement « le joueur gagne la partie ».

a. Justifier que $p_B(G) = \frac{3}{5}$

b. On admet que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à 0,3.

Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. a. Montrer que $p(G) = 0,4$.

b. Un joueur gagne la partie. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue ?

3. Les événements B et G sont-ils indépendants ? Justifier.

4. Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de parties gagnées.

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.

c. Calculer $p(X > 4)$ arrondie à 10^{-3} près. Donner une interprétation du résultat obtenu.

d. Calculer $E(X)$. Donner une interprétation du résultat obtenu.

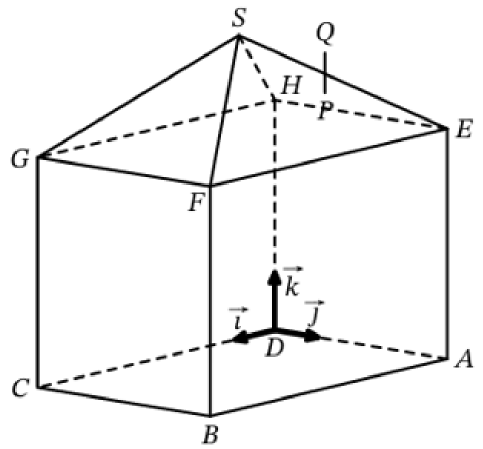
5. Un joueur fait n parties et on note p_n la probabilité de l'événement « le joueur gagne au moins une partie ».

a. Montrer que $p_n = 1 - 0{,}6^n$.

b. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à $0,99$.

Exercice 2 : 5 points

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle surmonté d'une pyramide $SEFGH$.
On a $DC = 6,\ DA = DH = 4$.
Soients les points I, J et K tels que : $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DH}$.
On note $\vec{\imath} = \overrightarrow{DI}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{DJ}$, $\vec{k} = \overrightarrow{DK}$. On se place dans le repère orthonormé ($D; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$).
On admet que le point S a pour coordonnées $(3;\ 2\ ;\ 6)$.



1. Justifier que les points B, E, F et G ont pour coordonnées :

   $B(6,4,0)$; $E(0,4,4)$; $F(6,4,4)$; $G(6,0,4)$

2. Démontrer que le volume de la pyramide $SEFGH$ représente le septième du volume total de la maison.
3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}\,(0;1;1)$ est normal au plan (EFS).

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EFS) est : $y + z - 8 = 0$.

4. On installe une antenne sur le toit, représentée par le segment $[PQ]$.

On dispose des données suivantes :

- le point P appartient au plan (EFS);
- le point Q a pour coordonnées $(2; 3; 5{,}5)$;
- la droite (PQ) est dirigée par le vecteur $\vec{k}$.

a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5{,}5 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

b. En déduire les coordonnées du point P.

c. En déduire la longueur PQ de l'antenne.

5. Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite (Δ) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -4 + 6s \\ y = 7 - 4s \\ z = 2 + 4s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$

a. Déterminer la position relative des droites (PQ) et (Δ).

b. L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment $[PQ]$?

Exercice 3 : 5 points

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Partie A

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

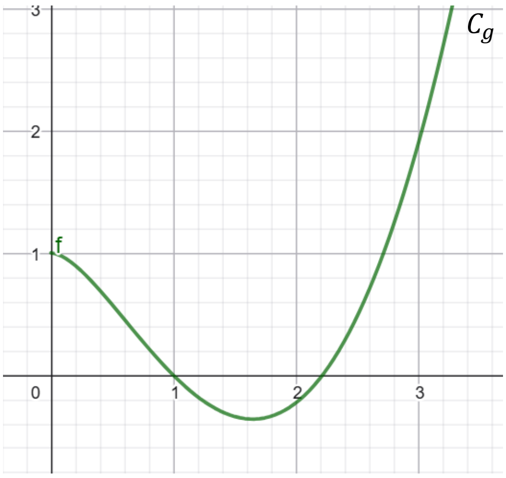
2. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. Interpréter graphiquement.

3. a. Montrer que $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$

b. Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$.



4. a. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de $g(x) = 0$.

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α telle que : $2{,}2 < \alpha < 2{,}3$.

5. a. Montrer que $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$

b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ coupe C_f en deux points d'abscisses 1 et α.

c. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[1; \alpha]$.

Partie C

6. Montrer que $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \ln 2$. (on remarque $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$).

7. Calculer l'aire délimitée par la courbe C_f, la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$

et $x = \sqrt{e}$.

Exercice 4 : 5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par : $f(x) = \frac{2+3x}{4+x}$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$.

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

3. Montrer que pour tout entier naturel n : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.

4. a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n); montrer l'égalité : $\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$

c. Déterminer la valeur de la limite ℓ.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par : $v_0 = 0{,}1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

5. Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?

6. a. Montrer que pour tout entier naturel n : $1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4+v_n}\right)(1 - v_n)$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n : $0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

7. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL — Spécialité Mathématiques

CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Bac Blanc – 14 Avril 2026 – Durée : 4 heures

Pr. Elakili

Exercice 1 — Probabilités

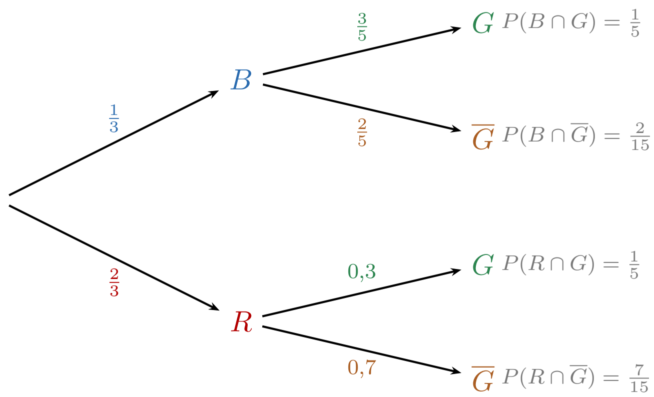
1. a. Justifier que $p_B(G) = \dfrac{3}{5}$

Sachant que la case obtenue est blanche, le joueur tire **un seul jeton** parmi les cinq jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5. Les numéros impairs sont 1, 3 et 5, soit **3 jetons favorables** sur 5.

$$p_B(G) = \frac{3}{5}$$

1. b. Compléter l'arbre de probabilité

$P(B) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$, $P(R) = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$. $p_B(G) = \dfrac{3}{5}$, $p_B(\overline{G}) = \dfrac{2}{5}$, $p_R(G) = 0{,}3$, $p_R(\overline{G}) = 0{,}7$.



2. a. Montrer que $p(G) = 0{,}4$

D'après la **formule des probabilités totales** (B et R partitionnent l'univers) :

$$p(G) = P(B) \times p_B(G) + P(R) \times p_R(G) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \times 0{,}3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$p(G) = 0{,}4$$

2. b. Probabilité d'avoir obtenu une case blanche sachant que le joueur gagne

D'après la **formule de Bayes** :

$$p_G(B) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{P(B) \times p_B(G)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}}{0{,}4} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$

$$p_G(B) = 0{,}5$$

3. Les événements B et G sont-ils indépendants ?

$P(B) \times P(G) = \dfrac{1}{3} \times 0{,}4 = \dfrac{2}{15} \approx 0{,}133$. Or $P(B \cap G) = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$.

$P(B \cap G) \neq P(B) \times P(G)$, **donc B et G ne sont pas indépendants.**

4. a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres

Le joueur effectue **10 parties indépendantes** (remise des jetons). Chaque partie est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = P(G) = 0{,}4$. X compte le nombre de succès.

$$X \sim \mathcal{B}(n = 10\,;\ p = 0{,}4)$$

4. b. $P(X = 3)$

$$P(X=3) = \binom{10}{3} \times 0{,}4^3 \times 0{,}6^7 = 120 \times 0{,}064 \times 0{,}0280\ldots$$

$$P(X = 3) \approx 0{,}215$$

4. c. $P(X > 4)$ et interprétation

$P(X > 4) = 1 - P(X \leqslant 4) = 1 - \big[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)\big]$.
Après calculs : $P(X \leqslant 4) \approx 0{,}6331$.

$P(X > 4) \approx 0{,}367$. **Il y a environ une chance sur trois de gagner plus de 4 parties sur 10.**

4. d. $E(X)$ et interprétation

$E(X) = n \times p = 10 \times 0{,}4 = 4$. **En moyenne, le joueur gagne 4 parties sur 10.**

5. a. Montrer que $p_n = 1 - 0{,}6^n$

L'événement contraire de « gagner au moins une partie » est « perdre les n parties ».
$P(\text{aucune victoire}) = (1 - 0{,}4)^n = 0{,}6^n$ (parties indépendantes).

$$p_n = 1 - 0{,}6^n$$

5. b. Plus petit n tel que $p_n \geqslant 0{,}99$

$$1 - 0{,}6^n \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}6^n \leqslant 0{,}01 \iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}6)} \approx 9{,}02.$$

Vérification : $0{,}6^9 \approx 0{,}0101 > 0{,}01$ et $0{,}6^{10} \approx 0{,}006 \leqslant 0{,}01$.

$$n = 10$$

Exercice 2 — Géométrie dans l'espace

1. Justifier les coordonnées de B, E, F et G

Dans le repère orthonormé $(D\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$: $\overrightarrow{DC} = 6\,\vec{\imath}$, $\overrightarrow{DA} = 4\,\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{DH} = 4\,\vec{k}$.
Donc : $D(0;0;0)$, $C(6;0;0)$, $A(0;4;0)$, $H(0;0;4)$.
$B = A + \overrightarrow{DC} \Rightarrow \boldsymbol{B(6;4;0)}$. $E = A + \overrightarrow{DH} \Rightarrow \boldsymbol{E(0;4;4)}$. $F = B + \overrightarrow{DH} \Rightarrow \boldsymbol{F(6;4;4)}$. $G = C + \overrightarrow{DH} \Rightarrow \boldsymbol{G(6;0;4)}$.

2. $V_{\text{pyramide}} = \frac{1}{7} V_{\text{total}}$

La base $EFGH$ est un rectangle dans le plan $z = 4$, d'aire $6 \times 4 = 24$.
Le sommet $S(3;2;6)$ est à hauteur $h = 6 - 4 = 2$ au-dessus de ce plan.

$$V_{\text{pyr}} = \frac{1}{3} \times 24 \times 2 = 16. \qquad V_{\text{parall.}} = 6 \times 4 \times 4 = 96. \qquad V_{\text{total}} = 96 + 16 = 112.$$

$$\frac{V_{\mathbf{pyr}}}{V_{\mathbf{total}}} = \frac{16}{112} = \frac{1}{7}\ \checkmark$$

3. a. $\vec{n}(0\,;1\,;1)$ est normal au plan (EFS)

$\overrightarrow{EF} = F - E = (6;0;0)$, $\overrightarrow{ES} = S - E = (3;-2;2)$.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \times 6 + 1 \times 0 + 1 \times 0 = 0$ ✓ $\quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{ES} = 0 \times 3 + 1 \times (-2) + 1 \times 2 = 0$ ✓

$\vec{n}(0;1;1)$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EFS), donc il est normal à ce plan.

3. b. Équation cartésienne du plan (EFS)

Équation : $y + z + d = 0$. Le point $E(0;4;4)$ y appartient : $4 + 4 + d = 0$, d'où $d = -8$.

$y + z - 8 = 0$

---

4. a. Représentation paramétrique de (PQ)

(PQ) passe par $Q(2;3;5{,}5)$ et est dirigée par $\vec{k}(0;0;1)$.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5{,}5 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

4. b. Coordonnées de P

$P \in (EFS)$: $3 + (5{,}5 + t) - 8 = 0 \Rightarrow t = -0{,}5$.

$P(2\,;3\,;5)$

4. c. Longueur PQ

$PQ = |z_Q - z_P| = |5{,}5 - 5| = 0{,}5$ **unité de longueur.**

---

5. a. Position relative de (PQ) et (Δ)

Résolvons le système : $-4 + 6s = 2 \Rightarrow s = 1$; $7 - 4(1) = 3$ ✓ ; $2 + 4(1) = 5{,}5 + t \Rightarrow t = 0{,}5$.
Les vecteurs directeurs $\vec{k}(0;0;1)$ et $\vec{u}(6;-4;4)$ ne sont pas colinéaires.

Les droites (PQ) et (Δ) sont sécantes en $M(2;3;6)$.

5. b. L'oiseau percute-t-il l'antenne ?

Le segment $[PQ]$ relie $P(2;3;5)$ à $Q(2;3;5{,}5)$, donc $z \in [5\,;5{,}5]$.
Or $z_M = 6 > 5{,}5$: $M \notin [PQ]$.

L'oiseau ne percute pas l'antenne.

Exercice 3 — Analyse de fonction

Partie A

1. Ensemble de définition de f

$f(x) = \dfrac{1}{x(1 - \ln x)}$ est définie si $x > 0$ et $x(1 - \ln x) \neq 0$, soit $x \neq e$.

$\mathcal{D}_f =]0\,;e[\cup]e\,;+\infty[$

2. Limites aux bornes

[leftmargin=8mm,itemsep=1pt]**En $x \to 0^+$:** $1 - \ln x \to +\infty$, $x \to 0^+$, donc $x(1 - \ln x) \to 0^+$ et $f(x) \to \boldsymbol{+\infty}$.
$\Rightarrow$ *Asymptote verticale* $x = 0$. **En $x \to e^-$:** $1 - \ln x \to 0^+$, donc $f(x) \to \boldsymbol{+\infty}$.
En $x \to e^+$: $1 - \ln x \to 0^-$, donc $f(x) \to \boldsymbol{-\infty}$.
$\Rightarrow$ *Asymptote verticale* $x = e$. **En $x \to +\infty$:** $x(1 - \ln x) \to -\infty$, donc $f(x) \to \mathbf{0^-}$.
$\Rightarrow$ *Asymptote horizontale* $y = 0$.

3. a. Montrer que $f'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$

Posons $u(x) = x(1-\ln x)$. Alors $f = \dfrac{1}{u}$, donc $f' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

$u'(x) = (1-\ln x) + x \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$.

D'où : $f'(x) = \dfrac{-(-\ln x)}{[x(1-\ln x)]^2} = \dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$. ✓

3. b. Variations de f et tableau

Le dénominateur $x^2(1-\ln x)^2 > 0$ sur $\mathcal{D}_f$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln x$.

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0^-

Minimum en $x = 1$: $f(1) = \dfrac{1}{1 \times (1-0)} = 1$.

Partie B

4. a. Nombre de solutions de $g(x) = 0$ (graphiquement)

D'après le graphique de $\mathcal{C}_g$, la courbe coupe l'axe des abscisses en deux points. L'équation $g(x) = 0$ admet 2 solutions.

4. b. Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in]2{,}2\,;2{,}3[$

$g(2{,}2) = 1 - (2{,}2)^2(1-\ln 2{,}2) \approx -0{,}024 < 0$.
$g(2{,}3) = 1 - (2{,}3)^2(1-\ln 2{,}3) \approx 0{,}116 > 0$.
g est continue sur $[2{,}2\,;2{,}3]$ et change de signe. Par le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe $\alpha \in]2{,}2\,;2{,}3[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

5. a. Montrer que $f(x) - x = \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$

$$f(x) - x = \frac{1}{x(1-\ln x)} - x = \frac{1 - x^2(1-\ln x)}{x(1-\ln x)} = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}. \checkmark$$

5. b. La droite $y = x$ coupe $\mathcal{C}_f$ en $x = 1$ et $x = \alpha$

$$f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff \frac{g(x)}{x(1-\ln x)} = 0 \iff g(x) = 0.$$

Or $g(1) = 1 - 1 \times 1 = 0$ et $g(\alpha) = 0$.

$(\Delta) : y = x$ coupe $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses $x = 1$ et $x = \alpha$.

5. c. Signe de $f(x) - x$ sur $[1\,;\alpha]$

Sur $[1;\alpha] \subset]0;e[$: $x(1-\ln x) > 0$. D'après le graphique, $g(x) \leqslant 0$ sur $[1;\alpha]$.

$f(x) - x \leqslant 0$ sur $[1;\alpha]$: la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de (Δ).

Partie C

6. Montrer que $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,\mathrm{d}x = \ln 2$

On écrit $\dfrac{1}{x(1-\ln x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$.

Posons $u(x) = 1 - \ln x$, alors $u'(x) = -\dfrac{1}{x}$.

On reconnaît la forme $\dfrac{-u'}{u}$, dont une primitive est $-\ln|u|$.

Donc une primitive de f est $F(x) = -\ln|1-\ln x|$.

$F(\sqrt{e}) = -\ln\left|1-\frac{1}{2}\right| = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$ $\quad F(1) = -\ln|1-0| = 0.$

$$\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \ln 2 - 0 = \ln 2 \checkmark$$

7. Aire entre $\mathcal{C}_f$, (Δ), $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$

Sur $[1;\sqrt{e}] \subset [1;\alpha]$: $f(x) \leqslant x$, donc $|f(x) - x| = x - f(x)$.

$$\mathcal{A} = \int_1^{\sqrt{e}} [x - f(x)]\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}} - \ln 2 = \frac{e-1}{2} - \ln 2$$

$\mathcal{A} = \dfrac{e-1}{2} - \ln 2 \approx 0{,}166$ **unités d'aire.**

Exercice 4 — Suites numériques

Partie A

1. Calculer u_1

$$u_1 = f(u_0) = f(3) = \frac{2+9}{4+3} = \frac{11}{7} \approx 1{,}571$$

2. Montrer que f est croissante sur $[0\,;4]$

$$f'(x) = \frac{3(4+x) - (2+3x)}{(4+x)^2} = \frac{10}{(4+x)^2} > 0 \text{ pour tout } x \in [0;4].$$

f est strictement croissante sur $[0\,;4]$.

3. Montrer par récurrence que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$

Initialisation $(n = 0)$: $u_0 = 3$ et $u_1 = \frac{11}{7} \approx 1{,}57$. On a bien $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 3$. ✓

Hérédité : Supposons $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$. Comme f est croissante :

[leftmargin=8mm,itemsep=0pt]$u_{n+1} \leqslant u_n \Rightarrow f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \Rightarrow \boldsymbol{u_{n+2} \leqslant u_{n+1}}$. $u_{n+1} \geqslant 1 \Rightarrow u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geqslant f(1) = 1 \Rightarrow \boldsymbol{u_{n+2} \geqslant 1}$. $u_{n+1} \leqslant 3 \Rightarrow u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leqslant f(3) = \frac{11}{7} \leqslant 3 \Rightarrow \boldsymbol{u_{n+2} \leqslant 3}$.

Par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$.

4. a. Convergence de (u_n)

(u_n) est décroissante et minorée par 1.

D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge.

4. b. $\ell = \dfrac{2+3\ell}{4+\ell}$

f continue et $u_{n+1} = f(u_n)$. En passant à la limite : $\ell = f(\ell) = \dfrac{2+3\ell}{4+\ell}$.

4. c. Valeur de ℓ

$\ell(4+\ell) = 2+3\ell \;\Rightarrow\; \ell^2+\ell-2=0.\quad \Delta = 9.\quad \ell = 1$ ou $\ell = -2$.
Comme $u_n \geqslant 1$, on écarte $\ell = -2$.

$\ell = 1$

Partie B

5. Conjecture sur (v_n)

$v_0 = 0{,}1$; $v_1 \approx 0{,}561$; $v_2 \approx 0{,}811$; $v_3 \approx 0{,}919$.

Conjecture : (v_n) est croissante et converge vers 1.

---

6. a. $1 - v_{n+1} = \dfrac{2}{4+v_n}(1-v_n)$

$$1 - v_{n+1} = 1 - \frac{2+3v_n}{4+v_n} = \frac{(4+v_n)-(2+3v_n)}{4+v_n} = \frac{2-2v_n}{4+v_n} = \frac{2}{4+v_n}(1-v_n).\ \checkmark$$

6. b. $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Initialisation : $1 - v_0 = 0{,}9 \leqslant 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0.\ \checkmark$
Hérédité : Supposons $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$v_n \geqslant 0 \;\Rightarrow\; 4 + v_n \geqslant 4 \;\Rightarrow\; \dfrac{2}{4+v_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$. De plus $1 - v_n \geqslant 0$, donc $1 - v_{n+1} \geqslant 0$.

Ainsi : $0 \leqslant 1 - v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}.\ \checkmark$

Par récurrence : $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

7. Convergence de (v_n)

$0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.
Par le **théorème des gendarmes** : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1 - v_n) = 0$.

(v_n) converge vers $\ell = 1$.