École Aljabr

Bac Blanc — Mathématiques

Classe de Terminale — Spécialité Mathématiques — Mai 2026

Pr. ELakili **Durée :** 4 heures **Barème : 20 points**

Calculatrice autorisée *Le sujet comporte 4 exercices indépendants* *Épreuve blanche*

Le candidat traitera les 4 exercices. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 — Probabilités (5 points)

Source : Bac Métropole, Session juin 2024, Sujet 1, Exercice 2.

Une enseigne d'électronique étudie la satisfaction des clients ayant acheté un modèle de téléviseur. Ces achats ont été réalisés selon trois canaux : sur **Internet**, en **magasin** d'électroménager, ou en **grande surface**. La répartition des ventes est la suivante : 60 % sur Internet, 30 % en magasin, 10 % en grande surface.
La proportion des clients satisfaits du service après-vente est :

- 75 % pour les achats Internet ;
- 90 % pour les achats en magasin ;
- 80 % pour les achats en grande surface.

On choisit au hasard un client. On note I, M, G les évènements « le client a acheté sur Internet, en magasin, en grande surface », et S : « le client est satisfait ». Sauf indication contraire, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

1. **(1 pt)** Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. **(0,5 pt)** Calculer la probabilité que le client ait acheté sur Internet *et* soit satisfait.
3. **(1 pt)** Démontrer que $P(S) = 0{,}80$.
4. **(0,5 pt)** Sachant que le client est satisfait, calculer la probabilité qu'il ait acheté sur Internet.
5. **(1 pt)** On choisit au hasard 30 clients (assimilable à un tirage avec remise). Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de clients satisfaits.
   a) Donner la loi de X et ses paramètres.
   b) Calculer $P(X \geq 25)$.
6. **(1 pt)** Soit T_1 et T_2 deux variables aléatoires indépendantes représentant les temps d'attente (en minutes) de deux clients successifs. On donne : $E(T_1) = 4$, $V(T_1) = 2$, $E(T_2) = 3$, $V(T_2) = 1$. On pose $T = T_1 + T_2$.
   a) Calculer $E(T)$ et $V(T)$.
   b) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev, majorer $P(|T - 7| \geq 3)$.

Exercice 2 — Géométrie dans l'espace (5 points)

Source : Bac Métropole, Session juin 2024, Sujet 1 (secours), Exercice 1.

On considère un repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel on place les points $B(4\,;0\,;0)$, $D(0\,;4\,;0)$, $E(0\,;0\,;4)$, ainsi que les points C, F, G, H tels que le solide $ABCDEFGH$ soit un cube. On note I le milieu de l'arête $[EF]$, et l'on considère le point $K(0\,;2\,;0)$.

1. **(1 pt)** Donner sans justification les coordonnées des points C, F, G et H.
2. **(1 pt)** Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IC) est :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = 4 - 4t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

3. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de la droite (IC).
   a) **(1 pt)** Démontrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est :

$$x + 2y - 2z - 4 = 0.$$

   b) **(0,5 pt)** Vérifier que le point K appartient au plan $\mathcal{P}$.
   c) **(1 pt)** Justifier que le point B appartient au plan $\mathcal{P}$. En déduire que la droite (BK) est l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et (ABC).
4. **(0,5 pt)** Déterminer les coordonnées du point J.

Exercice 3 — Étude d'une fonction (5 points)

Source : Bac Métropole, Session juin 2024, Sujet 1, Exercice 4 (Partie A).

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln(x),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$; on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. a) **(0,5 pt)** Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b) **(1 pt)** Démontrer que pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2x}.$$

   c) **(0,5 pt)** En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.
   d) **(1 pt)** Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire la convexité de f sur $]0\,;+\infty[$.
2. a) **(1 pt)** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans $]0\,;+\infty[$, une unique solution, notée α, et justifier que $\alpha \in [1\,;2]$.
   b) **(0,5 pt)** En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
   c) **(0,5 pt)** Démontrer que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

Exercice 4 — Suites (5 points)

Source : Bac Asie, Session mars 2023, Sujet 1, Exercice 1.

Un arboriculteur possède un verger contenant 400 arbres au 1er janvier 2024. Chaque année, il vend 10 % de ses arbres et en replante 60 nouveaux. On modélise l'évolution du nombre d'arbres en notant, pour tout entier naturel n, u_n le nombre d'arbres dans le verger au 1er janvier de l'année $(2024 + n)$. On a donc $u_0 = 400$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 0{,}9\, u_n + 60.$$

1. **(0,5 pt)** Calculer u_1 et u_2.
2. **(1 pt)** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq 600$.
3. **(1 pt)** Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
4. **(0,5 pt)** En déduire que la suite (u_n) est convergente. (On ne demande pas la valeur de la limite à cette question.)
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 600$.
   a) **(1 pt)** Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) **(0,5 pt)** En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
6. **(0,5 pt)** Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Fin du sujet — Bonne chance à toutes et à tous !

ÉCOLE ALJABR
CORRIGÉ — BAC BLANC

Mathématiques — Terminale Spécialité — Mai 2026

Pr. ELakili **Barème : 20 points**

EXERCICE 1

Probabilités — Métropole 2024, Sujet 1, Ex. 2

1. **(1 pt)** Arbre pondéré : à la racine, trois branches I, M, G pondérées respectivement par 0,6 ; 0,3 ; 0,1. À chaque extrémité, deux sous-branches S / $\overline{S}$ pondérées par $(0{,}75; 0{,}25)$; $(0{,}9; 0{,}1)$; $(0{,}8; 0{,}2)$ respectivement.
2. **(0,5 pt)** Par la formule des probabilités composées :

$$P(I \cap S) = P(I) \times P_I(S) = 0{,}6 \times 0{,}75 = \boxed{0{,}45}.$$

3. **(1 pt)** Les évènements I, M, G forment une partition de l'univers. Par la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(I)P_I(S) + P(M)P_M(S) + P(G)P_G(S) = 0{,}45 + 0{,}27 + 0{,}08 = \boxed{0{,}80}.$$

4. **(0,5 pt)** Probabilité conditionnelle :

$$P_S(I) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}45}{0{,}80} = 0{,}5625 \approx \boxed{0{,}563}.$$

5. **(1 pt)**
   a) Le tirage de 30 clients est assimilable à une répétition de 30 épreuves de Bernoulli indépendantes, de probabilité de succès $P(S) = 0{,}80$. Donc $X \sim \boxed{\mathcal{B}(30; 0{,}80)}$.
   b) À la calculatrice :

$$P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) \approx \boxed{0{,}428}.$$

6. **(1 pt)**
   a) Par linéarité de l'espérance : $E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = \boxed{7}$.
   Par indépendance de T_1 et T_2 : $V(T) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = \boxed{3}$.
   b) L'inégalité de Bienaymé–Tchebychev appliquée à T avec $\varepsilon = 3$ donne :

$$P\big(|T - E(T)| \geq 3\big) \leq \frac{V(T)}{3^2} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

Total : 5 / 5.

EXERCICE 2

Géométrie de l'espace — Métropole 2024, Sujet 1 (secours), Ex. 1

1. **(1 pt)** En utilisant les relations vectorielles dans le cube ($\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, etc.) :

$$\boxed{C(4;4;0)\,,\ F(4;0;4)\,,\ G(4;4;4)\,,\ H(0;4;4)}.$$

2. **(1 pt)** $E(0;0;4)$ et $F(4;0;4)$, donc I, milieu de $[EF]$, a pour coordonnées $I(2;0;4)$.
   Le vecteur $\overrightarrow{IC} = C - I = (4-2\,;\,4-0\,;\,0-4) = (2\,;\,4\,;\,-4)$.
   Donc $M(x;y;z) \in (IC) \iff \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{IM} = t\,\overrightarrow{IC}$, ce qui donne bien :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = 4 - 4t \end{cases}.$$

3. **a)** **(1 pt)** Le plan $\mathcal{P}$ est orthogonal à (IC), donc $\overrightarrow{IC}(2;4;-4)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Une équation cartésienne est de la forme $2x + 4y - 4z + d = 0$, ou en divisant par 2, $x + 2y - 2z + d' = 0$.
   $G(4;4;4) \in \mathcal{P}$ donne : $4 + 8 - 8 + d' = 0 \iff d' = -4$.
   D'où : $\boxed{x + 2y - 2z - 4 = 0}$.

b) (0,5 pt) Pour $K(0;2;0)$: $0+2\times 2-2\times 0-4=4-4=0$. Donc $\boxed{K\in\mathcal{P}}$.

c) (1 pt) Pour $B(4;0;0)$: $4+0-0-4=0$, donc $B\in\mathcal{P}$.
De plus B et K ont leur troisième coordonnée nulle, donc $B\in(ABC)$ et $K\in(ABC)$ (le plan (ABC) est le plan d'équation $z=0$).
Les points B et K étant distincts et appartenant aux deux plans $\mathcal{P}$ et (ABC) (qui sont distincts), la droite qu'ils déterminent est l'intersection : $\boxed{\mathcal{P}\cap(ABC)=(BK)}$.

4. (0,5 pt) J appartient à (IC) : $J=(2+2t\,;\,4t\,;\,4-4t)$ pour un certain $t\in\mathbb{R}$.
J appartient à $\mathcal{P}$: $(2+2t)+2(4t)-2(4-4t)-4=0$, soit $18t-10=0$, d'où $t=\dfrac{5}{9}$.

Donc $\boxed{J\left(\dfrac{28}{9}\,;\,\dfrac{20}{9}\,;\,\dfrac{16}{9}\right)}$.

Total : 5 / 5.

Exercice 3

Étude d'une fonction — Métropole 2024, Sujet 1, Ex. 4 (Partie A)

1. **a) (0,5 pt) En** 0^+ : $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-2) = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$, donc par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$.

En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

b) (1 pt) f est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, et :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2x} = \frac{2x+1}{2x}.$$

c) (0,5 pt) Pour $x > 0$: $2x+1 > 0$ et $2x > 0$, donc $f'(x) > 0$. Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[}$.

d) (1 pt) En dérivant $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2x}$: $f''(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$.

Pour $x > 0$, $f''(x) < 0$, donc $\boxed{f \text{ est concave sur }]0;+\infty[}$.

2. **a) (1 pt)** La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, avec $\lim\limits_{0^+} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

D'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.

Localisation : $f(1) = 1 - 2 + \dfrac{1}{2}\ln 1 = -1 < 0$ et $f(2) = 0 + \dfrac{1}{2}\ln 2 \approx 0{,}347 > 0$.

Donc $\alpha \in [1\,;\,2]$. $\boxed{\alpha \in [1;2]}$

b) (0,5 pt) f étant strictement croissante avec $f(\alpha) = 0$: $f(x) < 0$ sur $]0;\alpha[$ et $f(x) > 0$ sur $]\alpha;+\infty[$.

c) (0,5 pt) $f(\alpha) = 0$ s'écrit $\alpha - 2 + \dfrac{1}{2}\ln(\alpha) = 0$, soit $\dfrac{1}{2}\ln(\alpha) = 2 - \alpha$, d'où :

$$\boxed{\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)}.$$

Total : 5 / 5.

Exercice 4

Suites — Asie 2023, Sujet 1, Ex. 1

1. **(0,5 pt)** $u_1 = 0{,}9 \times 400 + 60 = \boxed{420}$ et $u_2 = 0{,}9 \times 420 + 60 = \boxed{438}$.

2. **(1 pt)** On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leq 600$ ».
Initialisation : $u_0 = 400 \leq 600$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire $u_n \leq 600$. Alors :

$$u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 60 \leq 0{,}9 \times 600 + 60 = 540 + 60 = 600.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 600}$.

3. **(1 pt)** On calcule :

$$u_{n+1} - u_n = 0{,}9\,u_n + 60 - u_n = -0{,}1\,u_n + 60 = -0{,}1\,(u_n - 600).$$

D'après la question 2., $u_n - 600 \leq 0$, donc $-0{,}1\,(u_n - 600) \geq 0$, soit $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
Donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

4. **(0,5 pt)** La suite (u_n) est croissante et majorée (par 600), donc d'après le *théorème de convergence monotone*, (u_n) $\boxed{\text{converge}}$.

5. **a) (1 pt)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 600 = 0{,}9\,u_n + 60 - 600 = 0{,}9\,u_n - 540 = 0{,}9\,(u_n - 600) = 0{,}9\,v_n.$$

Donc (v_n) est $\boxed{\text{géométrique de raison } q = 0{,}9}$, de premier terme $v_0 = u_0 - 600 = -200$.

b) (0,5 pt) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = -200 \times 0{,}9^n$, d'où :

$$\boxed{u_n = 600 - 200 \times 0{,}9^n}.$$

6. **(0,5 pt)** Comme $|0{,}9| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$, d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 600}$.
Interprétation : à long terme, le verger se stabilise autour de 600 arbres.

Total : 5 / 5.

Fin du corrigé — Note totale : 20 / 20