

Devoir Surveillé n°01 — Suites numériques et raisonnement par récurrence

Lycée Aljabr Oasis — Classe de TMATHS5 • Vendredi 25 septembre 2026 • Durée : 1 h 45 • Pr. Elakili

Barème : Ex. 1 (4 pts) — Ex. 2 (4 pts) — Ex. 3 (5 pts) — Ex. 4 (7 pts) *Seule la calculatrice de type collège est autorisée. La qualité de la rédaction et la précision des justifications seront prises en compte.*

Exercice 1 • Calculs de limites (4 points)

Déterminer la limite de chacune des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies ci-dessous, en détaillant la méthode utilisée pour lever l'éventuelle forme indéterminée.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{1 - 4n^2}$. (1 pt)

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}$. (1 pt)

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \frac{5^n - 2^n}{3 \times 5^n + 4}$. (2 pts)

Exercice 2 • Encadrement, gendarmes et comparaison (4 points)

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{n^2 + (-1)^n n}{2n^2 + 1}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{n^2 - n}{2n^2 + 1} \leq u_n \leq \frac{n^2 + n}{2n^2 + 1}$. (1 pt)

b) En déduire la limite de la suite (u_n) . (1 pt)

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{n^2 + \sin(n)}{n + 1}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n \geq n - 1$. (1 pt)

b) En déduire la limite de la suite (v_n) . (1 pt)

Exercice 3 • Extrait de bac — Une FAQ (5 points)

Source : Baccalauréat spécialité, Métropole, 20 mars 2023, Jour 1 (sujet 1), Exercice 3 — Partie A (questions 1 à 3) ; questions 4 et 5 adaptées.

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet. On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois. On admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées. Pour estimer le nombre de questions, **en centaines**, présentes sur la FAQ le n -ième mois, on modélise la situation à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \quad \text{et, pour tout entier } n \geq 1, \quad u_{n+1} = 0,9 u_n + 1,3.$$

1. Calculer u_2 et u_3 , puis proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice. (1 pt)

Exercice 3 • Extrait de bac — Une FAQ (suite)

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$. (1,5 pt)

3. En déduire que la suite (u_n) est croissante. (0,5 pt)

4. L'entreprise doit modifier la présentation de son site dès que la FAQ compte plus de 850 questions. À l'aide de la calculatrice, déterminer au cours de quel mois cette modification devra avoir lieu. Justifier la réponse en citant les valeurs utiles. (1 pt)

5. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Selon ce modèle, combien de questions la FAQ comptera-t-elle à long terme ? Le nombre de questions présentes sur la FAQ peut-il dépasser 1 300 ? Justifier. (1 pt)

Exercice 4 • Suite récurrente et étude de fonction (7 points)

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$, et la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}.$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie et que tous ses termes sont strictement positifs. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie A — Étude de la fonction f

1. Montrer que, pour tout $x > 0$: $f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$. (0,5 pt)

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$ (les limites aux bornes ne sont pas demandées). (1,5 pt)

3. En déduire que, pour tout $x \in [2; +\infty[$: $f(x) \in [2; +\infty[$. (0,5 pt)

4. Montrer que, pour tout $x > 0$: $f(x) - x = \frac{4 - x^2}{2x}$, puis en déduire le signe de $f(x) - x$ sur $[2; +\infty[$. (1 pt)

Partie B — Étude de la suite (u_n)

5. Calculer u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles. (0,5 pt)

6. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$. (1,5 pt)

7. En déduire que la suite (u_n) est convergente. (0,5 pt)

8. On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. Déterminer ℓ (on pourra utiliser la question 4). (1 pt)

Fin de l'épreuve — Bon courage à tous !

Devoir surveillé n°01 — Corrigé détaillé

Suites numériques et raisonnement par récurrence • Méthodes, pièges à éviter et conseils de rédaction
Lycée Aljabr Oasis — TMATHS5 • Vendredi 25 septembre 2026 • 1 h 45 • 4 exercices, 20 points

Pr. Elakili

Corrigé commenté

Site web : missionmaths360.com

⚡ Avant de commencer : lire tout le sujet et gérer son temps

Les 4 exercices sont indépendants : on peut commencer par celui où l'on est le plus à l'aise. Répartition conseillée pour 1 h 45 : **Ex. 1** (4 pts) $\approx$ 20 min • **Ex. 2** (4 pts) $\approx$ 20 min • **Ex. 3** (5 pts) $\approx$ 25 min • **Ex. 4** (7 pts) $\approx$ 35 min • relecture $\approx$ 5 min. Le barème de chaque question est rappelé entre crochets.

Exercice 1 • Calculs de limites

4 points

1. $u_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{1 - 4n^2}$

[1 pt]

Le numérateur tend vers $+\infty$ et le dénominateur vers $-\infty$: c'est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$.

✍ Méthode

Pour un quotient de polynômes en n , on met en facteur, au numérateur et au dénominateur, le terme de plus haut degré.

Pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{n^2 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{1}{n^2} - 4 \right)} = \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 4}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers -4 . $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$.

✓ Vérifier

On peut aussi factoriser : $2n^2 - 3n + 1 = (2n - 1)(n - 1)$ et $1 - 4n^2 = (1 - 2n)(1 + 2n)$, d'où $u_n = -\frac{n-1}{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: on retrouve bien $-\frac{1}{2}$.

2. $v_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}$

[1 pt]

Le dénominateur est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.

✍ Méthode

En présence d'une différence de racines carrées, on multiplie numérateur et dénominateur par la **quantité conjuguée** et on utilise $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{(n+2) - n} = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{2}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, donc par somme : $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

✗ Piège à éviter

Écrire « $\sqrt{n+2} - \sqrt{n} \rightarrow \infty - \infty = 0$ » est faux : $\infty - \infty$ est une forme indéterminée, pas un résultat. Ici le dénominateur tend bien vers 0^+ , mais cela se *démontre*, précisément grâce à la quantité conjuguée :

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}.$$

$$3. \quad w_n = \frac{5^n - 2^n}{3 \times 5^n + 4} \quad [2 \text{ pts}]$$

Le numérateur $(\infty - \infty)$ et le quotient $(\frac{\infty}{\infty})$ sont indéterminés.

Méthode

Avec des puissances, on divise numérateur et dénominateur par la puissance **dominante** (celle de plus grande base), ici 5^n , puis on utilise : si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en divisant par $5^n > 0$:

$$w_n = \frac{1 - \frac{2^n}{5^n}}{3 + \frac{4}{5^n}} = \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{3 + 4\left(\frac{1}{5}\right)^n}.$$

Comme $-1 < \frac{2}{5} < 1$ et $-1 < \frac{1}{5} < 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$. Le numérateur tend vers 1, le dénominateur vers 3. $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{1}{3}$.

✗ Piège à éviter

Diviser par 2^n ne lève pas l'indétermination : on obtient $\left(\frac{5}{2}\right)^n$ qui tend vers $+\infty$ en haut et en bas. Il faut toujours diviser par le terme qui « l'emporte ».

Exercice 2 • Encadrement, gendarmes et comparaison

4 points

$$1.a) \quad \text{Encadrement de } u_n = \frac{n^2 + (-1)^n n}{2n^2 + 1} \quad [1 \text{ pt}]$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. Comme $n \geq 0$, on peut multiplier par n sans changer le sens des inégalités :

$$-n \leq (-1)^n n \leq n, \quad \text{puis, en ajoutant } n^2 : \quad n^2 - n \leq n^2 + (-1)^n n \leq n^2 + n.$$

Enfin $2n^2 + 1 > 0$: en divisant, le sens est conservé. $\rightsquigarrow$ **Pour tout** $n \in \mathbb{N}$: $\frac{n^2 - n}{2n^2 + 1} \leq u_n \leq \frac{n^2 + n}{2n^2 + 1}$.

$$1.b) \quad \text{Limite de } (u_n) \quad [1 \text{ pt}]$$

Pour $n \geq 1$:

$$\frac{n^2 - n}{2n^2 + 1} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{n^2 + n}{2n^2 + 1} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

Les deux suites qui encadrent (u_n) ont la **même limite** $\frac{1}{2}$: d'après le théorème des gendarmes, $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

✗ Piège à éviter

Pour appliquer le théorème des gendarmes, il faut citer ses **trois** hypothèses : l'encadrement, et les deux limites *égales*. Un encadrement par deux suites de limites différentes ne permet pas de conclure.

$$2.a) \quad \text{Minoration de } v_n = \frac{n^2 + \sin(n)}{n + 1} \quad [1 \text{ pt}]$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\sin(n) \geq -1$, on a $n^2 + \sin(n) \geq n^2 - 1$. Puisque $n + 1 > 0$:

$$v_n \geq \frac{n^2 - 1}{n + 1} = \frac{(n - 1)(n + 1)}{n + 1} = n - 1.$$

$\rightsquigarrow$ **Pour tout** $n \in \mathbb{N}$: $v_n \geq n - 1$.

Autre rédaction possible

On étudie le signe de la différence : $v_n - (n-1) = \frac{n^2 + \sin(n) - (n-1)(n+1)}{n+1} = \frac{1 + \sin(n)}{n+1} \geq 0$, car $\sin(n) \geq -1$ et $n+1 > 0$.

2.b) Limite de (v_n)

[1 pt]

On a $v_n \geq n-1$ pour tout n , et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Méthode

Pour une limite **infinie**, une seule inégalité suffit (théorème de comparaison) : une *minoration* par une suite qui tend vers $+\infty$, ou une *majoration* par une suite qui tend vers $-\infty$. Le théorème des gendarmes, lui, sert pour une limite **finie**.

Exercice 3 • Extrait de bac — Une FAQ**5 points**

Source : Baccalauréat spécialité, Métropole, 20 mars 2023, Jour 1 (sujet 1), Exercice 3.

1. Calcul de u_2 et u_3

[1 pt]

$$u_2 = 0,9 \times u_1 + 1,3 = 0,9 \times 3 + 1,3 = 4 \quad \text{et} \quad u_3 = 0,9 \times 4 + 1,3 = 4,9.$$

$\rightsquigarrow$ Selon ce modèle, la FAQ compte 400 questions le 2^e mois et 490 questions le 3^e mois.

⚠ Piège à éviter

u_n est exprimé en centaines : $u_2 = 4$ signifie 400 questions, et non 4 questions.

2. Récurrence : $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$ pour tout $n \geq 1$

[1,5 pt]

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$ ».

Initialisation. Pour $n = 1$: $13 - \frac{100}{9} \times 0,9 = 13 - 10 = 3 = u_1$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3 = 0,9 \left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n \right) + 1,3 = 11,7 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} + 1,3 = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $\mathcal{P}(1)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire : d'après le principe de récurrence, $\rightsquigarrow$ pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$.

⚠ Piège à éviter

L'initialisation se fait ici au rang $n = 1$ (le premier terme est u_1), et non au rang 0. Dans l'hérédité, bien écrire $0,9 \times 0,9^n = 0,9^{n+1}$.

3. Sens de variation

[0,5 pt]

Pour tout $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{100}{9} (0,9^{n+1} - 0,9^n) = -\frac{100}{9} \times 0,9^n (0,9 - 1) = \frac{10}{9} \times 0,9^n > 0.$$

$\rightsquigarrow$ La suite (u_n) est strictement croissante.

4. Mois de la modification

[1 pt]

850 questions correspondent à 8,5 centaines : on cherche le premier entier n tel que $u_n > 8,5$. À la calculatrice (par la formule, ou en itérant $u \mapsto 0,9u + 1,3$) :

$$u_8 = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^8 \approx 8,217 < 8,5 \quad \text{et} \quad u_9 = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^9 \approx 8,695 > 8,5.$$

La suite étant croissante (question 3) : pour $n \leq 8$, $u_n \leq u_8 < 8,5$, et pour $n \geq 9$, $u_n \geq u_9 > 8,5$. $\rightsquigarrow$ **La modification devra avoir lieu au cours du 9^e mois.**

✗ Piège à éviter

Deux erreurs fréquentes : comparer u_n à 850 au lieu de 8,5 ; et oublier d'invoquer la croissance, sans laquelle on ne sait pas si $n = 9$ est bien le *premier* rang qui convient.

5. Limite et interprétation

[1 pt]

Comme $-1 < 0,9 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 13 - 0 = 13$. $\rightsquigarrow$ **À long terme, la FAQ comptera environ 1 300 questions.**

De plus, pour tout $n \geq 1$, $\frac{100}{9} \times 0,9^n > 0$, donc $u_n < 13$. $\rightsquigarrow$ **Le nombre de questions ne dépassera jamais 1 300 (il ne l'atteindra même pas).**

Exercice 4 • Suite récurrente et étude de fonction**7 points****1. Dérivée de f**

[0,5 pt]

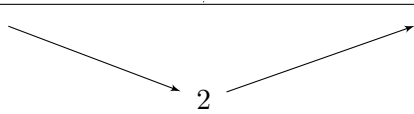
f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{2x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}.$$

2. Signe de $f'(x)$ et variations

[1,5 pt]

Pour $x > 0$: $2x^2 > 0$ et $x + 2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $x - 2$. On calcule $f(2) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 2$.

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f			

$\rightsquigarrow$ **f est strictement décroissante sur $]0; 2]$, strictement croissante sur $[2; +\infty[$, et admet un minimum égal à 2, atteint en $x = 2$.**

3. Stabilité de $[2; +\infty[$

[0,5 pt]

f est croissante sur $[2; +\infty[$: pour tout $x \geq 2$, $f(x) \geq f(2) = 2$. $\rightsquigarrow$ **Pour tout $x \in [2; +\infty[$: $f(x) \in [2; +\infty[$.**

4. Signe de $f(x) - x$

[1 pt]

Pour tout $x > 0$: $f(x) - x = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} - x = \frac{2}{x} - \frac{x}{2} = \frac{4 - x^2}{2x}.$

Sur $[2; +\infty[$: $x^2 \geq 4$, donc $4 - x^2 \leq 0$, et $2x > 0$. $\rightsquigarrow$ **Pour tout $x \in [2; +\infty[$: $f(x) - x \leq 0$, c'est-à-dire $f(x) \leq x$.**

5. Calcul de u_1 et u_2

[0,5 pt]

$$u_1 = f(3) = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}, \quad u_2 = f\left(\frac{13}{6}\right) = \frac{13}{12} + \frac{12}{13} = \frac{169 + 144}{156} = \frac{313}{156}.$$

$\rightsquigarrow u_1 = \frac{13}{6}$ et $u_2 = \frac{313}{156}$ (fraction irréductible : 313 est premier et $156 = 2^2 \times 3 \times 13$).

6. Récurrence : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$

[1,5 pt]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$ ».

Initialisation. $u_0 = 3$ et $u_1 = \frac{13}{6} \approx 2,17$, donc $2 \leq u_1 \leq u_0 \leq 3$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$. Les réels 2, u_{n+1} , u_n et 3 appartiennent à $[2; +\infty[$, intervalle sur lequel f est **croissante** (question 2). On peut donc appliquer f sans changer le sens des inégalités :

$$f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(3), \quad \text{soit} \quad 2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{13}{6} \leq 3.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $\rightsquigarrow$ **pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.**

✗ Piège à éviter

On ne peut « appliquer f » à une inégalité que si f est **croissante sur un intervalle contenant tous les nombres concernés**. Ici, f n'est pas croissante sur $]0; +\infty[$ tout entier : il faut préciser qu'on travaille sur $[2; +\infty[$.

7. Convergence

[0,5 pt]

D'après la question 6, pour tout n : $u_{n+1} \leq u_n$ (la suite est décroissante) et $u_n \geq 2$ (elle est minorée par 2). $\rightsquigarrow$ **D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge.**

8. Valeur de la limite ℓ

[1 pt]

Comme $u_n \geq 2$ pour tout n , par passage à la limite, $\ell \geq 2$; en particulier $\ell > 0$. D'après la question 4 :

$$f(\ell) = \ell \iff f(\ell) - \ell = 0 \iff \frac{4 - \ell^2}{2\ell} = 0 \iff \ell^2 = 4 \iff \ell = 2 \text{ ou } \ell = -2.$$

Comme $\ell \geq 2$, on écarte -2 . $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

✗ Piège à éviter

Ne pas conclure « $\ell = 2$ ou $\ell = -2$ » : il faut justifier le choix, grâce à la minoration $u_n \geq 2$.

🔍 Pour aller plus loin

La relation $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{4}{u_n} \right)$ est la **méthode de Héron** : elle fournit des approximations de $\sqrt{4} = 2$ qui convergent très vite ($u_2 \approx 2,0064$, $u_3 \approx 2,00001$). En remplaçant 4 par $a > 0$, on approche $\sqrt{a}$: c'est l'une des plus anciennes méthodes de calcul des racines carrées.