

Devoir Surveillé de Mathématiques N°1.

Durée : 1H 45 min.

=====

- *La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
 - *Le sujet se comporte de 4 exercices indépendants.*
-

Exercice 1. *Equations et Inéquations.* (6 points)

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$(E_1) : -7x^2 + 9x + 76 = 0.$$

$$(E_4) : \sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{3 - 2x}.$$

$$(I_1) : -x^2 + 5x < 7.$$

$$(I_2) : \frac{x+1}{x^2-2x} + \frac{2x}{2-x} \geq 0.$$

Exercice 2. *Variation d'une aire. Inéquation.* (5 points)

ABC est un triangle rectangle isocèle tel que :

$$AB = AC = 5\text{cm}.$$

AHMK est un rectangle. On pose : $AH = x$, $0 \leq x \leq 5$.

1. *Prouver que l'aire $S(x)$ du domaine hachuré est égal à :*

$$S(x) = x^2 - 5x + \frac{25}{2}.$$

2. (a) *Etudier le sens de variation de S .*

(b) *Pour quelle valeur de x cette aire est-elle minimale ? Calculer ce minimum.*

3. *Trouver les valeurs de x de $[0; 5]$ telles que : $S(x) \leq \frac{75}{8}$.*

Exercice 3. *Une équation à paramètre.* (6 points)

On donne le trinôme suivant :

$$f(x) = mx^2 + 4x + 2(m - 1).$$

1. *Pour quelle valeur de m l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle une seule solution ? Calculer alors cette solution.*

2. (a) Quel est l'ensemble des nombres m pour lesquels l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions distinctes ?

(b) Quel est l'ensemble des nombres m pour lesquels $f(x) < 0$ pour tout nombre réel x ?

Exercice 4. *Un changement de variable.* (3 points)

On pose : $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 9x + 2$.

Résoudre l'équation : $P(x) = 0$.

Indication : On pourra considérer $\frac{P(x)}{x^2}$ et poser : $X = x + \frac{1}{x}$.

Fin de l'épreuve.

Devoir surveillé n° 1 — Corrigé détaillé

Le second degré • Méthodes, pièges à éviter et conseils de rédaction

Classe de Première — Spécialité Mathématiques • Durée : 1 h 45 • 4 exercices, 20 points

PR. ELAKILI

Corrigé commenté

Site web : missionmaths360.com

 **Avant de commencer : lire tout le sujet et gérer son temps**

Les 4 exercices sont indépendants : commencer par celui où l'on est le plus à l'aise. Répartition conseillée pour 1 h 45 : **Ex. 1** (6 pts) $\approx$ 30 min • **Ex. 2** (5 pts) $\approx$ 25 min • **Ex. 3** (6 pts) $\approx$ 30 min • **Ex. 4** (3 pts) $\approx$ 15 min • relecture $\approx$ 5 min. Le barème indiqué entre crochets [...] est indicatif.

Exercice 1 • Équations et inéquations

6 points

$$(E_1) : -7x^2 + 9x + 76 = 0$$

[1,5 pt]

Méthode

Pour un coefficient a négatif, on peut multiplier les deux membres par -1 : l'équation obtenue a les mêmes solutions, et on fait moins d'erreurs de signe.

$$(E_1) \iff 7x^2 - 9x - 76 = 0. \text{ On a } a = 7, b = -9, c = -76, \text{ donc}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 81 + 4 \times 7 \times 76 = 81 + 2128 = 2209 = 47^2 > 0.$$

$$\text{Il y a deux solutions : } x_1 = \frac{9 - 47}{14} = -\frac{38}{14} = -\frac{19}{7} \text{ et } x_2 = \frac{9 + 47}{14} = \frac{56}{14} = 4. \quad \rightsquigarrow S = \left\{ -\frac{19}{7}; 4 \right\}.$$

 **Vérifier en 20 secondes**

$x_1 + x_2 = 4 - \frac{19}{7} = \frac{9}{7} = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = -\frac{76}{7} = \frac{c}{a}$. Autre contrôle : $7 \times 16 - 9 \times 4 - 76 = 0$. Retenir aussi que $2209 = 47^2$: quand Δ est grand, penser aux carrés parfaits ($40^2 = 1600$, $45^2 = 2025$, $50^2 = 2500$).

$$(E_4) : \sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{3 - 2x}$$

[1,5 pt]

Méthode

Pour des réels A et B : $\sqrt{A} = \sqrt{B} \iff (A = B \text{ et } B \geq 0)$.

On élève au carré puis on vérifie la condition d'existence. Il suffit de vérifier $B \geq 0$: si $A = B$ et $B \geq 0$, alors $A \geq 0$ aussi.

$$\text{Résolution de } A = B. \quad x^2 - x - 2 = 3 - 2x \iff x^2 + x - 5 = 0; \quad \Delta = 1 + 20 = 21 > 0 :$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \approx -2,79 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \approx 1,79.$$

Vérification de la condition $3 - 2x \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq \frac{3}{2}$:

- $3 - 2x_1 = 3 + 1 + \sqrt{21} = 4 + \sqrt{21} > 0$: x_1 convient ;
- $3 - 2x_2 = 3 + 1 - \sqrt{21} = 4 - \sqrt{21} < 0$ car $\sqrt{21} > \sqrt{16} = 4$: x_2 est à rejeter.

$$\rightsquigarrow S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \right\}.$$

Piège à éviter

Élever au carré sans condition fait apparaître une **fausse solution** : pour x_2 , on aurait des racines carrées de nombres négatifs, ce qui n'a pas de sens. Pour exclure x_2 , il faut une justification exacte, comme $4 - \sqrt{21} < 0$; une valeur approchée ne suffit pas.

 **Autre rédaction possible : l'ensemble de définition d'abord**

$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2) \geq 0 \iff x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2$; $3 - 2x \geq 0 \iff x \leq \frac{3}{2}$. L'équation a donc un sens pour $x \in]-\infty; -1]$. Seule $x_1 \approx -2,79$ appartient à cet ensemble.

$$(I_1) : -x^2 + 5x < 7$$

[1 pt]

$(I_1) \iff -x^2 + 5x - 7 < 0$. Le trinôme a pour discriminant $\Delta = 25 - 28 = -3 < 0$: il ne s'annule pas et il est, pour tout réel x , **du signe de** $a = -1$, donc strictement négatif. $\rightsquigarrow S = \mathbb{R}$.

✗ Piège à éviter

Confondre équation et inéquation : $\Delta < 0$ ne signifie pas « pas de solution » pour une inéquation. Avec $\Delta < 0$, le trinôme garde le même signe sur $\mathbb{R}$: l'ensemble solution est donc soit $\mathbb{R}$, soit $\emptyset$, selon le signe de a . Il faut aussi tout ramener dans un seul membre ($\dots < 0$) avant d'étudier un signe.

$$(I_2) : \frac{x+1}{x^2-2x} + \frac{2x}{2-x} \geq 0$$

[2 pts]

🔍 Méthode

1. Chercher les valeurs interdites. **2.** Tout mettre au même dénominateur, dans un seul membre. **3.** Factoriser le numérateur et le dénominateur. **4.** Faire un tableau de signes. **5.** Lire l'ensemble solution en faisant attention aux crochets.

Valeurs interdites. $x^2 - 2x = x(x-2)$ et $2-x$ s'annulent en 0 et 2 : on travaille sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$.

Même dénominateur. Comme $2-x = -(x-2)$:

$$\frac{x+1}{x(x-2)} + \frac{2x}{2-x} = \frac{x+1}{x(x-2)} - \frac{2x \cdot x}{x(x-2)} = \frac{-2x^2 + x + 1}{x(x-2)}.$$

Numérateur. $-2x^2 + x + 1$: $\Delta = 1 + 8 = 9$, racines $\frac{-1 \pm 3}{-4}$, soit $-\frac{1}{2}$ et 1. On a $a = -2 < 0$: il est positif entre les racines, négatif à l'extérieur.

Dénominateur. $x(x-2)$: trinôme de racines 0 et 2, avec $a = 1 > 0$: il est négatif entre 0 et 2, positif à l'extérieur.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	$+\infty$
$-2x^2 + x + 1$	−	0	+	+	0	−
$x(x - 2)$	+	+	0	−	−	0
$\frac{-2x^2 + x + 1}{x(x - 2)}$	−	0	+	−	0	+

$$\rightsquigarrow S = \left[-\frac{1}{2}; 0\right[\cup [1; 2[.$$

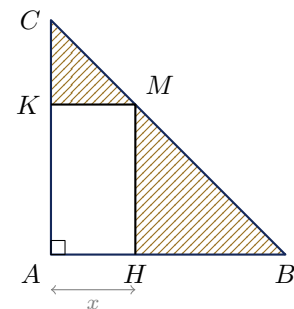
✗ Piège à éviter

Ne jamais faire de « produit en croix » dans une inéquation : multiplier par $x(x-2)$, dont le signe varie, peut inverser le sens de l'inégalité. Aux valeurs interdites 0 et 2, le crochet est toujours **ouvert** ; aux racines du numérateur ($-\frac{1}{2}$ et 1), il est **fermé** car l'inégalité est large ($\geq$). Enfin, bien penser au signe « − » qui apparaît quand on écrit $2-x = -(x-2)$.

Exercice 2 • Variation d'une aire, inéquation

5 points

ABC est un triangle rectangle isocèle en A avec $AB = AC = 5$ cm. $AHMK$ est un rectangle, avec $H \in [AB]$, $M \in [BC]$ et $K \in [AC]$. On pose $AH = x$, avec $0 \leq x \leq 5$. Le domaine hachuré est formé des deux triangles HBM et KMC .



1. Expression de l'aire $S(x)$

[1,5 pt]

Le triangle ABC est rectangle isocèle en A , donc $\widehat{ABC} = 45^\circ$. Comme $AHMK$ est un rectangle, $(HM) \perp (AB)$: le triangle HBM est rectangle en H avec un angle de 45° en B . Il est donc isocèle en H :

$$HM = HB = AB - AH = 5 - x.$$

(On peut aussi utiliser le théorème de Thalès dans le triangle ABC , avec $(HM) \parallel (AC)$: $\frac{HM}{AC} = \frac{BH}{BA}$, soit $HM = 5 - x$.)

L'aire du triangle ABC vaut $\frac{5 \times 5}{2} = \frac{25}{2}$, et celle du rectangle vaut $AH \times HM = x(5 - x)$. Donc

$$S(x) = \frac{25}{2} - x(5 - x) = x^2 - 5x + \frac{25}{2}.$$

Contrôle par un autre calcul

On peut aussi additionner les aires des deux triangles hachurés : $\frac{(5-x)^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{2x^2 - 10x + 25}{2}$, ce qui redonne bien $x^2 - 5x + \frac{25}{2}$. Pour une question « Prouver que », chaque égalité doit être **justifiée** (ici par la propriété géométrique qui donne $HM = 5 - x$) : recopier la formule ne rapporte aucun point.

2. (a) Sens de variation de S 2. (b) Minimum

[1,5 pt + 0,5 pt]

Forme canonique :

$$S(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{25}{2} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}.$$

x	0	$\frac{5}{2}$	5
$S(x)$	$\frac{25}{2}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{25}{2}$

Comme $a = 1 > 0$, avec $\alpha = \frac{5}{2} \in [0; 5]$: S est **décroissante** sur $[0; \frac{5}{2}]$ et **croissante** sur $[\frac{5}{2}; 5]$.

$\leadsto$ L'aire est **minimale pour** $x = \frac{5}{2}$, et ce minimum vaut $S\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} = 6,25 \text{ cm}^2$. Géométriquement, M est alors le milieu de $[BC]$ et $AHMK$ est un carré de côté $\frac{5}{2}$, dont l'aire est la moitié de celle du triangle.

✗ Piège à éviter

Le tableau de variations se fait sur $[0; 5]$, **pas** sur $\mathbb{R}$: pas de $\pm\infty$, et on indique les valeurs aux bornes $S(0) = S(5) = \frac{25}{2}$. Il faut vérifier que $\alpha = \frac{5}{2}$ appartient bien à $[0; 5]$. Enfin, bien distinguer la valeur où le minimum est atteint ($x = \frac{5}{2}$) et la valeur du minimum ($\frac{25}{4}$).

3. Résoudre $S(x) \leq \frac{75}{8}$ sur $[0; 5]$

[1,5 pt]

Avec la forme canonique (méthode la plus rapide ici) :

$$S(x) \leq \frac{75}{8} \iff \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \leq \frac{75}{8} - \frac{50}{8} = \frac{25}{8} \iff -\frac{5}{2\sqrt{2}} \leq x - \frac{5}{2} \leq \frac{5}{2\sqrt{2}}.$$

Avec $\frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$: $\frac{10 - 5\sqrt{2}}{4} \leq x \leq \frac{10 + 5\sqrt{2}}{4}$, soit environ $0,73 \leq x \leq 4,27$. Ces deux bornes sont dans $[0; 5]$.

$$\leadsto S = \left[\frac{10 - 5\sqrt{2}}{4}; \frac{10 + 5\sqrt{2}}{4} \right].$$

Méthode du discriminant, pour vérifier

$S(x) \leq \frac{75}{8} \iff 8x^2 - 40x + 25 \leq 0$; $\Delta = 1600 - 800 = 800 = (20\sqrt{2})^2$, racines $\frac{40 \pm 20\sqrt{2}}{16} = \frac{10 \pm 5\sqrt{2}}{4}$. On a $a > 0$: le trinôme est négatif entre les racines. On obtient le même ensemble. Il faut toujours **intersecter avec** $[0; 5]$ avant de conclure.

Exercice 3 • Une équation à paramètre**6 points**

On considère $f(x) = mx^2 + 4x + 2(m - 1)$, où m est un réel.

☞ **La règle d'or des paramètres**

Le coefficient de x^2 est m , et il **peut être nul**. On traite donc **toujours d'abord le cas** $m = 0$, où l'équation est du premier degré. Ce n'est qu'ensuite, pour $m \neq 0$, qu'on peut utiliser Δ .

Calcul du discriminant (pour $m \neq 0$) :

$$\Delta = 16 - 4 \times m \times 2(m - 1) = 16 - 8m^2 + 8m = -8(m^2 - m - 2) = -8(m + 1)(m - 2).$$

(Le trinôme $m^2 - m - 2$ a pour racines évidentes -1 et 2 : leur somme vaut 1 et leur produit -2 .)

Signe de Δ (trinôme en m , de coefficient $-8 < 0$, de racines -1 et 2) : $\Delta > 0$ pour $-1 < m < 2$, $\Delta = 0$ pour $m \in \{-1; 2\}$, $\Delta < 0$ pour $m < -1$ ou $m > 2$.

1. Valeurs de m pour lesquelles $f(x) = 0$ a une seule solution

[2,5 pts]

- **Cas $m = 0$:** $f(x) = 4x - 2$, et $4x - 2 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$. Il y a une seule solution.
- **Cas $m \neq 0$:** il y a une seule solution si et seulement si $\Delta = 0$, c'est-à-dire $m = -1$ ou $m = 2$. La solution est alors $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{m}$:
 - $m = 2$: $f(x) = 2x^2 + 4x + 2 = 2(x + 1)^2$, solution $x_0 = -1$;
 - $m = -1$: $f(x) = -x^2 + 4x - 4 = -(x - 2)^2$, solution $x_0 = 2$.

$\rightsquigarrow$ L'équation a une seule solution pour $m \in \{-1; 0; 2\}$, et cette solution vaut respectivement 2 , $\frac{1}{2}$ et -1 .

✗ **Piège à éviter**

Oublier $m = 0$ est **l'erreur la plus fréquente** de ce DS. L'énoncé parle de « trinôme », mais pour $m = 0$, f n'en est plus un, et l'équation a pourtant bien une seule solution. Une copie qui écarte $m = 0$ en le *justifiant* (« pour $m = 0$, f n'est pas un trinôme ») montre qu'elle a vu le problème ; l'oublier sans rien dire coûte des points.

2. (a) Deux solutions distinctes

[1,5 pt]

Pour $m = 0$, il n'y a qu'une solution. Pour $m \neq 0$, il y a deux solutions distinctes si et seulement si $\Delta > 0 \iff -1 < m < 2$. $\rightsquigarrow m \in]-1; 0[\cup]0; 2[$.

✗ **Piège à éviter**

Répondre $] -1; 2[$ sans retirer 0 : pour $m = 0$, l'équation $4x - 2 = 0$ n'a qu'une solution.

2. (b) $f(x) < 0$ pour tout réel x

[2 pts]

☞ **Trinôme de signe constant**

Pour $a \neq 0$: $ax^2 + bx + c < 0$ pour tout réel $x \iff a < 0$ et $\Delta < 0$.

Si $\Delta = 0$, le trinôme s'annule en un point, donc il n'est pas *strictement* négatif partout.

- **Cas $m = 0$:** $f(x) = 4x - 2$ prend des valeurs positives (par exemple $f(1) = 2 > 0$) : $m = 0$ ne convient pas.
- **Cas $m \neq 0$:** on veut $m < 0$ et $\Delta < 0$, c'est-à-dire $m < 0$ et ($m < -1$ ou $m > 2$), soit $m < -1$.
 $\rightsquigarrow m \in]-\infty; -1[$. *Vérification* : pour $m = -2$, $f(x) = -2x^2 + 4x - 6$ et $\Delta = 16 - 48 < 0$, avec $a < 0$.

✗ **Piège à éviter**

Écrire seulement « $\Delta < 0$ » donne $m < -1$ ou $m > 2$, ce qui est faux : pour $m > 2$, on a $a = m > 0$ et f est strictement *positive* sur $\mathbb{R}$. La condition sur le signe de a est indispensable. De même, $m = -1$ est exclu car alors $\Delta = 0$ et $f(2) = 0$.

Exercice 4 • Un changement de variable

3 points

$P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 9x + 2$. Résoudre $P(x) = 0$. Indication : considérer $\frac{P(x)}{x^2}$ et poser $X = x + \frac{1}{x}$.

🔍 **Reconnaître la structure**

Les coefficients 2, -9, 8, -9, 2 sont **symétriques** : c'est un polynôme dit « réciproque ». Si x est solution, alors $\frac{1}{x}$ l'est aussi. La division par x^2 regroupe les termes deux à deux, et fait apparaître $x + \frac{1}{x}$ et $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Étape 1 : on peut diviser par x^2 . $P(0) = 2 \neq 0$, donc 0 n'est pas solution. Pour $x \neq 0$: $P(x) = 0 \iff \frac{P(x)}{x^2} = 0$.

Étape 2 : on regroupe.

$$\frac{P(x)}{x^2} = 2x^2 - 9x + 8 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8.$$

Étape 3 : on exprime tout en fonction de X . $X^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, donc $x^2 + \frac{1}{x^2} = X^2 - 2$. Ainsi :

$$\frac{P(x)}{x^2} = 2(X^2 - 2) - 9X + 8 = 2X^2 - 9X + 4.$$

Étape 4 : on résout en X . $2X^2 - 9X + 4 = 0$: $\Delta = 81 - 32 = 49$, $X = \frac{9 \pm 7}{4}$, soit $X = 4$ ou $X = \frac{1}{2}$.

Étape 5 : on revient à x (en multipliant par $x \neq 0$) :

- $x + \frac{1}{x} = 4 \iff x^2 - 4x + 1 = 0$: $\Delta = 12$, $x = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$;
- $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \iff 2x^2 - x + 2 = 0$: $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$, aucune solution.

$\rightsquigarrow S = \{2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\}$. On retrouve la symétrie : $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$, donc les deux solutions sont inverses l'une de l'autre.

✗ **Piège à éviter**

1. Ne pas justifier $x \neq 0$ avant de diviser par x^2 . 2. S'arrêter aux valeurs $X = 4$ et $X = \frac{1}{2}$: ce ne sont *pas* les solutions de l'équation, il faut revenir à x . 3. Écrire $x^2 + \frac{1}{x^2} = X^2$ en oubliant le terme « -2 » du double produit.

🔑 **Pour aller plus loin**

Le calcul donne la factorisation $P(x) = (x^2 - 4x + 1)(2x^2 - x + 2)$, qu'on peut vérifier en développant. La valeur $X = \frac{1}{2}$ ne pouvait pas donner de solution : pour tout réel $x \neq 0$, $|x + \frac{1}{x}| \geq 2$, car $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x}$ et $x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{(x+1)^2}{x}$.

Bilan : les 10 réflexes du second degré à avoir le jour du DS

1. Tout ramener dans **un seul membre** ($\dots = 0$, $\dots < 0$) avant de calculer Δ .
2. Si $a < 0$, multiplier par -1 pour une équation ; pour une inéquation, cela **inverse le sens**.
3. **Vérifier ses racines** avec $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.
4. $\Delta < 0$: aucune racine, mais un trinôme **du signe de a** sur tout $\mathbb{R}$.
5. Avec des racines carrées : élever au carré, puis **vérifier les conditions** et rejeter les fausses solutions.
6. Avec des quotients : **valeurs interdites** d'abord, pas de produit en croix, tableau de signes, crochets ouverts aux valeurs interdites.
7. Sur un intervalle imposé ($[0; 5]$...) : tableau limité à cet intervalle et solutions **intersectées** avec lui.
8. Paramètre devant x^2 : **étudier d'abord le cas où il est nul**.
9. Signe constant : « < 0 partout » $\iff a < 0$ et $\Delta < 0$; « > 0 partout » $\iff a > 0$ et $\Delta < 0$.
10. Après un changement d'inconnue : **revenir à l'inconnue de départ** et conclure par une phrase.