

Suites : limites et convergence

Fiche d'exercices • Chapitre 01 • Classe de TMATHS5

Lycée Aljabr Oasis — Casablanca

Pr. Elakili

Mathématiques

12 exercices, difficulté croissante

Difficulté : ★☆☆☆ abordable • ★★☆☆ classique • ★★★☆ solide • ★★★★★ exigeant

Exercice 1 • Limites : opérations et suites de référence

★☆☆☆

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\text{a) } u_n = 4 - \frac{1}{n^2} ; \quad \text{b) } v_n = 2n^3 + \sqrt{n} ; \quad \text{c) } w_n = \frac{5}{2n+3}.$$

Exercice 2 • Limite d'une suite géométrique

★☆☆☆

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes :

$$\text{a) } u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n ; \quad \text{b) } v_n = 2 \times 5^n ; \quad \text{c) } w_n = 4 - 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Exercice 3 • Lever une forme indéterminée

★★☆☆

Après avoir reconnu une forme indéterminée, déterminer la limite de :

$$\text{a) } u_n = n^2 - 4n ; \quad \text{b) } v_n = \frac{3n+1}{5n-2} ; \quad \text{c) } w_n = \frac{2n^2-n}{n^2+3}.$$

Exercice 4 • Suites majorées, minorées, bornées

★★☆☆

1. Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n}{n+1}$. La suite (u_n) est-elle majorée ? minorée ? bornée ? Justifier.
2. Démontrer que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée.

Exercice 5 • Théorème de comparaison

★★☆☆

1. Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + (-1)^n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n-1$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
2. Soit (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -n^2 + \cos(n)$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Exercice 6 • Théorème des gendarmes

★★★★

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes, définies sur $\mathbb{N}^*$:

$$\text{a) } u_n = \frac{\sin(n)}{n} ; \quad \text{b) } v_n = \frac{2 + (-1)^n}{n+1} ; \quad \text{c) } w_n = 3 + \frac{\cos(n)}{n^2}.$$

Exercice 7 • Croissances comparées

★★★★☆

On admet que, pour tout entier $n \geq 4$, on a $2^n \geq n^2$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 4$, $0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$.
2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n}$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n}$.

Exercice 8 • Récurrence : forme explicite d'une suite

★★★★☆

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3^{n+1} + 1}{2}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 9 • Théorème de convergence monotone

★★★★☆

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3n-1}{n+2}$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 3.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge. (On pourra ensuite conjecturer sa limite.)

Exercice 10 • Suite récurrente : bornée, monotone, convergente

★★★★★

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 \leq u_n \leq 4$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge. On admet que sa limite ℓ vérifie $\ell = \frac{1}{2}\ell + 2$; déterminer ℓ .

Exercice 11 • Un encadrement plus fin

★★★★★

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k} = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n}.$$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{n}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2 + 1}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 12 • Une suite géométrique l'emporte sur n

★★★★★

Soit $q > 1$ un réel et $h = q - 1$ (donc $h > 0$).

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $q^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{q^n}{n} \geq \frac{(n-1)h^2}{2}$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n}$.
3. Conclure : une suite géométrique de raison $q > 1$ croît plus vite que la suite (n) .

Fin de la fiche — Bon travail, TMATHS5!

Corrigé de la fiche

Suites : limites et convergence

Chapitre 01 • Classe de TMATHS5

Pr. Elakili

Mathématiques

missionmaths360.com

Exercice 1 • Limites : opérations et suites de référence

★☆☆☆

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.
- b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^3 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, donc par somme $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n + 3) = +\infty$, donc par quotient $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

Exercice 2 • Limite d'une suite géométrique

★☆☆☆

- a) $-1 < \frac{3}{4} < 1$, donc $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- b) $5 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$, d'où $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- c) $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, d'où $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 4$.

Exercice 3 • Lever une forme indéterminée

★★☆☆

- a) Forme « $+\infty - \infty$ ». On factorise : $n^2 - 4n = n^2 \left(1 - \frac{4}{n}\right)$.
Comme $n^2 \rightarrow +\infty$ et $1 - \frac{4}{n} \rightarrow 1 > 0$, $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- b) Forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On factorise par n : $\frac{3n+1}{5n-2} = \frac{3+\frac{1}{n}}{5-\frac{2}{n}} \rightarrow \frac{3}{5}$. $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{3}{5}$.
- c) On factorise par n^2 : $\frac{2n^2-n}{n^2+3} = \frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n^2}} \rightarrow 2$. $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2$.

Exercice 4 • Suites majorées, minorées, bornées

★★☆☆

1. On écrit $u_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Comme $\frac{1}{n+1} > 0$, on a $u_n < 1$; et $u_n \geq 0$ (quotient de nombres positifs). Donc pour tout n , $0 \leq u_n < 1$: la suite est **minorée** par 0, **majorée** par 1, donc **bornée**.

2. Pour tout n , $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $-\frac{1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$. Ainsi $1 \leq v_n \leq 3$: la suite (v_n) est **bornée**.

Exercice 5 • Théorème de comparaison

★★☆☆

1. Pour tout n , $(-1)^n \geq -1$, donc $u_n = n + (-1)^n \geq n - 1$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 1) = +\infty$, donc par comparaison $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. Pour tout n , $\cos(n) \leq 1$, donc $v_n = -n^2 + \cos(n) \leq -n^2 + 1$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2 + 1) = -\infty$, donc par comparaison $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Exercice 6 • Théorème des gendarmes

★★★★☆

- a) $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ donne $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. Ces deux bornes tendent vers 0, donc $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- b) $1 \leq 2 + (-1)^n \leq 3$ donne $\frac{1}{n+1} \leq v_n \leq \frac{3}{n+1}$. Ces deux bornes tendent vers 0, donc $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.
- c) $-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ donne $3 - \frac{1}{n^2} \leq w_n \leq 3 + \frac{1}{n^2}$, d'où $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 3$.

Exercice 7 • Croissances comparées

★★★★☆

1. Pour $n \geq 4$, on a $2^n \geq n^2 > 0$, donc $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2}$, puis $\frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. Comme de plus $\frac{n}{2^n} > 0$, on obtient $0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$.
2. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, le théorème des gendarmes donne $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$. Enfin $\frac{2^n}{n} = \frac{1}{n/2^n}$ avec $\frac{n}{2^n} \rightarrow 0^+$, donc $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$.

Exercice 8 • Récurrence : forme explicite d'une suite

★★★★☆

1. Notons $P(n) : u_n = \frac{3^{n+1} + 1}{2}$.

Initialisation. Pour $n = 0 : \frac{3^1 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2 = u_0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$. Alors

$$u_{n+1} = 3u_n - 1 = 3 \times \frac{3^{n+1} + 1}{2} - 1 = \frac{3^{n+2} + 3 - 2}{2} = \frac{3^{n+2} + 1}{2},$$

ce qui est $P(n+1)$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3^{n+1} + 1}{2}$.

2. Comme $3 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{n+1} = +\infty$, donc $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 9 • Théorème de convergence monotone

★★★★☆

1. On écrit $u_n = \frac{3n-1}{n+2} = 3 - \frac{7}{n+2}$. Comme $\frac{7}{n+2} > 0$, on a $u_n < 3$: la suite est **majorée par 3**.
2. $u_{n+1} - u_n = \left(3 - \frac{7}{n+3}\right) - \left(3 - \frac{7}{n+2}\right) = \frac{7}{n+2} - \frac{7}{n+3} = \frac{7}{(n+2)(n+3)} > 0$. La suite est donc **strictement croissante**.
3. (u_n) est croissante et majorée par 3 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge**. Comme $\frac{7}{n+2} \rightarrow 0$, on conjecture $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

Exercice 10 • Suite récurrente : bornée, monotone, convergente

★★★★☆

1. Notons $P(n) : 3 \leq u_n \leq 4$.

Initialisation. $u_0 = 3$, donc $3 \leq u_0 \leq 4$.

Hérédité. Supposons $3 \leq u_n \leq 4$. En multipliant par $\frac{1}{2} > 0$ puis en ajoutant 2 :

$$\frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}u_n \leq 2 \implies \frac{7}{2} \leq u_{n+1} \leq 4.$$

Comme $3 \leq \frac{7}{2}$, on a bien $3 \leq u_{n+1} \leq 4$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 \leq u_n \leq 4$; la suite est bornée.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 2 - u_n = \frac{4 - u_n}{2} \geq 0$ puisque $u_n \leq 4$. La suite est donc **croissante**.

3. (u_n) est croissante et majorée par 4 : elle **converge**. Sa limite ℓ vérifie $\ell = \frac{1}{2}\ell + 2$, soit $\frac{1}{2}\ell = 2$, d'où $\rightsquigarrow \ell = 4$.

Exercice 11 • Un encadrement plus fin

★★★★

1. Pour $1 \leq k \leq n$, on a $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$, donc $\frac{1}{n^2 + n} \leq \frac{1}{n^2 + k} \leq \frac{1}{n^2 + 1}$. En additionnant ces n inégalités (pour $k = 1$ à n) :

$$\frac{n}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2 + 1}.$$

2. $\frac{n}{n^2 + n} = \frac{1}{n + 1} \rightarrow 0$ et $\frac{n}{n^2 + 1} \rightarrow 0$. Par le théorème des gendarmes, $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 12 • Une suite géométrique l'emporte sur n

★★★★

1. Notons $P(n)$: $q^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$, avec $h = q - 1 > 0$.

Initialisation. Pour $n = 1$: $q = 1 + h$ et le membre de droite vaut $1 + h + 0 = 1 + h$. Il y a égalité, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$. Comme $q = 1 + h > 0$, on multiplie par q :

$$\begin{aligned} q^{n+1} &\geq (1+h) \left(1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 \right) \\ &= 1 + (n+1)h + \left(\frac{n(n-1)}{2} + n \right) h^2 + \frac{n(n-1)}{2}h^3 \\ &\geq 1 + (n+1)h + \frac{n(n+1)}{2}h^2, \end{aligned}$$

car $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}h^3 \geq 0$. C'est exactement $P(n+1)$.

Conclusion. L'inégalité est vraie pour tout $n \geq 1$.

2. En ne conservant que le dernier terme (les autres étant positifs), on a pour $n \geq 2$: $q^n \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2$, d'où $\frac{q^n}{n} \geq \frac{(n-1)h^2}{2}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)h^2}{2} = +\infty$ (car $h^2 > 0$), par comparaison $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n} = +\infty$.

3. Pour $q > 1$, la suite géométrique (q^n) tend vers $+\infty$ « plus vite » que la suite (n) : c'est le principe des *croissances comparées*.