

LE SECOND DEGRÉ

Fiche d'exercices • **Chapitre 01** • Classe de **Première**
Spécialité Mathématiques

Pr. Elakili

12 exercices, difficulté croissante

missionmaths360.com

Difficulté : ★☆☆☆ abordable • ★★☆☆ classique • ★★★☆ solide • ★★★★ exigeant

EXERCICE 1 • Résolution d'équations

★☆☆☆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $x^2 + 4x + 4 = 0$ c) $2x^2 - 3x - 2 = 0$ d) $x^2 + x + 1 = 0$.

EXERCICE 2 • Forme canonique

★☆☆☆

Mettre chaque trinôme sous forme canonique, puis en déduire son extremum :

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ b) $g(x) = 2x^2 + 4x - 1$.

EXERCICE 3 • Deux réels connaissant leur somme et leur produit

★★☆☆

- Déterminer deux réels dont la somme vaut 7 et le produit vaut 12.
- Déterminer deux réels dont la somme vaut 1 et le produit vaut -6 .
- Existe-t-il deux réels dont la somme vaut 2 et le produit vaut 5 ? Justifier.

EXERCICE 4 • Somme et produit des racines

★★☆☆

On considère l'équation $2x^2 - 7x + 3 = 0$, de racines x_1 et x_2 . *Sans calculer ces racines :*

- Donner la valeur de $x_1 + x_2$ et de $x_1 x_2$.
- En déduire la valeur de $x_1^2 + x_2^2$, puis celle de $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

EXERCICE 5 • Inéquations du second degré

★★☆☆

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $x^2 - x - 6 > 0$ b) $-2x^2 + 5x - 2 \geq 0$ c) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$.

EXERCICE 6 • Parabole et droite

★★☆☆

Dans un repère, on considère la parabole $\mathcal{P} : y = x^2 - 3x + 2$ et la droite $\mathcal{D} : y = x - 1$.

- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.
- Étudier la position relative de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ (au-dessus, au-dessous).

EXERCICE 7 • Équation à paramètre

★★★★☆

Soit m un réel. On considère l'équation $(E_m) : x^2 - 2x + m = 0$.

1. Discuter, selon les valeurs de m , le nombre de solutions de (E_m) .
2. Pour quelle valeur de m l'équation admet-elle une racine double ? Préciser cette racine.

EXERCICE 8 • Équations se ramenant au second degré

★★★★☆

Résoudre dans $\mathbb{R}$, à l'aide du changement d'inconnue $X = x^2$:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

EXERCICE 9 • Construire une nouvelle équation

★★★★★

On considère l'équation $x^2 - 5x + 3 = 0$, de racines x_1 et x_2 .

1. Calculer $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$, puis $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ et $\frac{1}{x_1} \times \frac{1}{x_2}$.
2. En déduire une équation du second degré à coefficients entiers dont les racines sont $\frac{1}{x_1}$ et $\frac{1}{x_2}$.

EXERCICE 10 • Somme et somme des cubes

★★★★★

Déterminer deux réels dont la somme vaut 6 et dont la somme des cubes vaut 72.

(On pourra utiliser l'identité $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$.)

EXERCICE 11 • Équation à paramètre : signe des racines

★★★★★

Soit m un réel. On considère l'équation $(E_m) : x^2 - (m + 1)x + m - 1 = 0$.

1. Montrer que (E_m) admet deux racines distinctes pour tout réel m .
2. Pour quelles valeurs de m ces deux racines sont-elles de signes contraires ?
3. Pour quelles valeurs de m sont-elles toutes deux strictement positives ?

EXERCICE 12 • Problème d'optimisation

★★★★★

On veut délimiter un enclos rectangulaire contre un mur : le côté le long du mur n'est pas clôturé. On dispose de 40 m de grillage pour les *trois* autres côtés. On note x (en m) la largeur de l'enclos (les deux côtés perpendiculaires au mur).

1. Exprimer la longueur du côté parallèle au mur en fonction de x , puis l'aire $A(x)$ de l'enclos.
2. Déterminer les dimensions de l'enclos pour lesquelles son aire est maximale, et préciser cette aire maximale.

Fin de la fiche — Bon travail !

LE SECOND DEGRÉ — CORRIGÉ

Chapitre 01 • Classe de **Première** • Spécialité Mathématiques

Pr. Elakili

missionmaths360.com

EXERCICE 1 • Résolution d'équations

- a) $x^2 - 5x + 6 = 0 : \Delta = 25 - 24 = 1, x = \frac{5 \pm 1}{2}$, donc $S = \{2; 3\}$.
 b) $x^2 + 4x + 4 = 0 : \Delta = 0$, racine double $x = -2$, donc $S = \{-2\}$.
 c) $2x^2 - 3x - 2 = 0 : \Delta = 9 + 16 = 25, x = \frac{3 \pm 5}{4}$, donc $S = \{-\frac{1}{2}; 2\}$.
 d) $x^2 + x + 1 = 0 : \Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, donc $S = \emptyset$.

EXERCICE 2 • Forme canonique

- a) $f(x) = x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$. Comme $a = 1 > 0$, f admet un *minimum* égal à -4 , atteint en $x = 3$.
 b) $g(x) = 2x^2 + 4x - 1 = 2[(x + 1)^2 - 1] - 1 = 2(x + 1)^2 - 3$. Comme $a = 2 > 0$, g admet un *minimum* égal à -3 , atteint en $x = -1$.

EXERCICE 3 • Deux réels connaissant leur somme et leur produit

Deux réels de somme S et de produit P sont les solutions de $X^2 - SX + P = 0$.

1. $X^2 - 7X + 12 = 0 : \Delta = 1, X = \frac{7 \pm 1}{2}$; les réels sont 3 et 4.
 2. $X^2 - X - 6 = 0 : \Delta = 25, X = \frac{1 \pm 5}{2}$; les réels sont -2 et 3.
 3. $X^2 - 2X + 5 = 0 : \Delta = 4 - 20 = -16 < 0$. Il n'existe donc *pas* de tels réels.

EXERCICE 4 • Somme et produit des racines

Pour $2x^2 - 7x + 3 = 0 : a = 2, b = -7, c = 3$.

1. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{7}{2}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$.
 2. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{49}{4} - 3 = \frac{37}{4}; \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{7/2}{3/2} = \frac{7}{3}$.

EXERCICE 5 • Inéquations du second degré

- a) $x^2 - x - 6 > 0$: racines -2 et 3 ($\Delta = 25$), parabole tournée vers le haut, donc > 0 à l'extérieur des racines : $S =]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$.
 b) $-2x^2 + 5x - 2 \geq 0$: racines $\frac{1}{2}$ et 2 ($\Delta = 9$), $a = -2 < 0$, donc ≥ 0 entre les racines : $S = [\frac{1}{2}; 2]$.
 c) $x^2 - 4x + 4 \leq 0 : (x - 2)^2 \leq 0$, nul seulement en $x = 2 : S = \{2\}$.

EXERCICE 6 • Parabole et droite

1. On résout $x^2 - 3x + 2 = x - 1$, soit $x^2 - 4x + 3 = 0 : \Delta = 4, x = \frac{4 \pm 2}{2}$, donc $x = 1$ ou $x = 3$.
 Points d'intersection : $A(1; 0)$ et $B(3; 2)$.

2. On étudie $d(x) = (x^2 - 3x + 2) - (x - 1) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) :$

$$d(x) > 0 \text{ pour } x < 1 \text{ ou } x > 3 \text{ (}\mathcal{P} \text{ au-dessus de } \mathcal{D}\text{), } d(x) < 0 \text{ pour } 1 < x < 3 \text{ (}\mathcal{P} \text{ au-dessous).}$$

Les courbes se coupent en A et B .

EXERCICE 7 • Équation à paramètre

$(E_m) : x^2 - 2x + m = 0$, avec $\Delta = 4 - 4m$.

1. $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 1$: deux solutions distinctes. $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$: une solution double. $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > 1$: aucune solution réelle.

2. Racine double pour $m = 1$; elle vaut $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$.

EXERCICE 8 • Équations se ramenant au second degré

On pose $X = x^2$ (avec $X \geq 0$).

a) $X^2 - 5X + 4 = 0$: $\Delta = 9$, $X = \frac{5 \pm 3}{2}$, donc $X = 4$ ou $X = 1$. D'où $x^2 = 4$ ou $x^2 = 1$: $S = \{-2; -1; 1; 2\}$.

b) $X^2 - 13X + 36 = 0$: $\Delta = 25$, $X = \frac{13 \pm 5}{2}$, donc $X = 9$ ou $X = 4$. D'où $x^2 = 9$ ou $x^2 = 4$: $S = \{-3; -2; 2; 3\}$.

EXERCICE 9 • Construire une nouvelle équation

Pour $x^2 - 5x + 3 = 0$: $\Delta = 13 > 0$, deux racines non nulles (produit $3 \neq 0$).

1. $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 x_2 = 3$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{5}{3}$, $\frac{1}{x_1} \times \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{3}$.

2. $\frac{1}{x_1}$ et $\frac{1}{x_2}$ ont pour somme $\frac{5}{3}$ et pour produit $\frac{1}{3}$: elles sont racines de $X^2 - \frac{5}{3}X + \frac{1}{3} = 0$, soit, en multipliant par 3 :

$$3X^2 - 5X + 1 = 0.$$

EXERCICE 10 • Somme et somme des cubes

Soient a, b de somme $a + b = 6$ et de produit $P = ab$. Avec $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$:

$$72 = 6^3 - 3P \times 6 = 216 - 18P \Rightarrow 18P = 144 \Rightarrow P = 8.$$

Donc a, b sont racines de $X^2 - 6X + 8 = 0$: $\Delta = 4$, $X = \frac{6 \pm 2}{2}$, d'où $\{a, b\} = \{2; 4\}$.

Vérification : $2^3 + 4^3 = 8 + 64 = 72$.

EXERCICE 11 • Équation à paramètre : signe des racines

$(E_m) : x^2 - (m+1)x + m - 1 = 0$; on note $S = x_1 + x_2 = m + 1$ et $P = x_1 x_2 = m - 1$.

1. $\Delta = (m+1)^2 - 4(m-1) = m^2 - 2m + 5 = (m-1)^2 + 4 > 0$ pour tout m : deux racines distinctes.

2. Racines de signes contraires $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

3. Racines toutes deux strictement positives $\Leftrightarrow P > 0$ et $S > 0 \Leftrightarrow m > 1$ et $m > -1 \Leftrightarrow m > 1$.

EXERCICE 12 • Problème d'optimisation

On note x la largeur (deux côtés perpendiculaires au mur) et y la longueur (côté parallèle au mur). Le grillage couvre trois côtés : $2x + y = 40$, donc $y = 40 - 2x$, avec $0 < x < 20$.

1. $A(x) = xy = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$.

2. A est un trinôme du second degré avec $a = -2 < 0$: il admet un *maximum* au sommet, en $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{-4} = 10$. Sous forme canonique $A(x) = -2(x - 10)^2 + 200$.

Pour $x = 10$: $y = 40 - 20 = 20$ et $A = 200$. $\Rightarrow$ L'aire est maximale pour un enclos de 10 m sur 20 m, d'aire 200 m².