

Raisonnement par récurrence et suites

Fiche d'entraînement n°3 • Chapitre 01 • Classe de TMAHS5 • Lycée Aljabr Oasis, Casablanca

Préparation du devoir surveillé du vendredi 25 septembre 2026 • 12 exercices, difficulté croissante

Difficulté : ★☆☆☆ abordable • ★★☆☆ classique • ★★★☆ solide • ★★★★ exigeant

Exercice 1 • Forme explicite d'une suite

★☆☆☆

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 4$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 7 \times 3^n - 2$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2 • Somme de produits

★☆☆☆

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k(k+2) = 1 \times 3 + 2 \times 4 + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.$$

Exercice 3 • Divisibilité par 6

★★☆☆

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $n^3 + 5n$ est divisible par 6.*Indication : on pourra remarquer que $n(n+1)$ est le produit de deux entiers consécutifs, donc un nombre pair.*

Exercice 4 • Comparaison et gendarmes

★★☆☆

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes, définies sur $\mathbb{N}^*$:

$$\text{a) } u_n = \frac{2n + (-1)^n}{n+1} ; \quad \text{b) } v_n = n + \sqrt{n} \cos(n) ; \quad \text{c) } w_n = \frac{n^2 + (-1)^n n}{2n^2 + 1}.$$

Exercice 5 • Une somme avec des puissances de 2

★★☆☆

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

2. On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ (croissances comparées). En déduire la limite de cette somme.

Exercice 6 • Suite définie par une fonction polynôme

★★★☆☆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 2}{3}$, et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier le sens de variation de f sur $[0; 1]$ et montrer que si $x \in [0; 1]$, alors $f(x) \in [0; 1]$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
3. En déduire que (u_n) converge. Résoudre l'équation $f(x) = x$ et déterminer la limite de (u_n) .

Exercice 7 • Extrait de bac — Un encadrement par n et $n+1$

★★★☆☆

*Source : Bac Métropole, session de mars 2021, sujet 1, exercice au choix A (questions 1, 3 et 4).*La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$.

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.
2.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $n \leq u_n \leq n+1$.
 - b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .
 - c. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice 8 • Une minoration par récurrence

★★★☆☆

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $S_n \geq \sqrt{n}$.
2. En déduire la limite de la suite (S_n) .

Exercice 9 • Une suite qui approche $\sqrt{2}$

★★★★

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$.

1. Calculer u_1 et u_2 (valeur exacte, puis valeur approchée à 10^{-3} près).
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$. En déduire que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire le sens de variation de (u_n) .
5. Démontrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 10 • Extrait de bac — Télétravail et satisfaction

★★★★

Source : Bac Centres étrangers, session de mars 2021, sujet 1, Exercice 3 (question A.4 adaptée).

En mai 2020, une entreprise propose à ses collaborateurs de choisir entre le télétravail et le travail dans ses locaux ; seuls 200 d'entre eux choisissent alors le télétravail. Chaque mois, 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent continuent, et 450 collaborateurs supplémentaires le choisissent. On note a_n le nombre de collaborateurs en télétravail le n -ième mois après mai 2020 ; ainsi $a_0 = 200$.

Partie A

1. Calculer a_1 .
2. Justifier que, pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = 0,85 a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = a_n - 3000$.
 - a. Démontrer que (v_n) est géométrique de raison 0,85.
 - b. Exprimer v_n , puis a_n , en fonction de n .
4. Déterminer la limite de la suite (a_n) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

Partie B Le nombre de collaborateurs *satisfaits* (en milliers) est modélisé par la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$.

1. Démontrer que la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x + 4}{x + 2}$ est strictement croissante.
2.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
 - b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. On admet que, pour tout entier naturel n : $0 \leq 4 - u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. En déduire la limite de (u_n) et l'interpréter.

Exercice 11 • Extrait de bac — La posidonie de la baie de l'Alycastre

★★★★

Source : Bac Métropole, 17 juin 2025, sujet 1, Exercice 4, Partie A.

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie. La zone étudiée a une superficie totale de 20 hectares (ha) et, au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha. Pour tout entier naturel n , u_n désigne la superficie (en ha) recouverte au premier juillet de l'année $2024 + n$; ainsi $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0,02 u_n^2 + 1,3 u_n.$$

1. Calculer la superficie recouverte au premier juillet 2025 d'après ce modèle.
2. On note h la fonction définie sur $[0; 20]$ par $h(x) = -0,02x^2 + 1,3x$. On admet que h est croissante sur $[0; 20]$.
 - a. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.
 - c. Justifier que $L = 15$.
3. Les biologistes veulent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte dépassera 14 ha.
 - a. Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.
 - b. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche la réponse à cette question.

```
def seuil():    while ... :    u=...
               n=0          n=...    return n
               u=1
```

Exercice 12 • Deux résultats du cours à démontrer

★★★★

1. Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers un réel ℓ . Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq \ell$.
(Définition : tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes à partir d'un certain rang.)
2. Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Raisonnement par récurrence et suites — Corrigé

Fiche d'entraînement n°3 • Chapitre 01 • Classe de TMAHS5 • Lycée Aljabr Oasis, Casablanca

Pr. Elakili • Site web : missionmaths360.com

Exercice 1 • Forme explicite d'une suite

1. $u_1 = 3 \times 5 + 4 = 19$ et $u_2 = 3 \times 19 + 4 = 61$.2. **Initialisation.** $7 \times 3^0 - 2 = 5 = u_0$: vrai au rang 0.**Hérédité.** Supposons $u_n = 7 \times 3^n - 2$. Alors $u_{n+1} = 3(7 \times 3^n - 2) + 4 = 7 \times 3^{n+1} - 6 + 4 = 7 \times 3^{n+1} - 2$.**Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rightsquigarrow u_n = 7 \times 3^n - 2$.3. Comme $3 > 1$, $\lim 3^n = +\infty$, donc $\rightsquigarrow \lim u_n = +\infty$.

Exercice 2 • Somme de produits

Initialisation. Pour $n = 1$: $1 \times 3 = 3$ et $\frac{1 \cdot 2 \cdot 9}{6} = 3$. Vrai au rang 1.**Hérédité.** Supposons $\sum_{k=1}^n k(k+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6} + (n+1)(n+3) = \frac{(n+1)[n(2n+7) + 6(n+3)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 13n + 18)}{6},$$

et comme $2n^2 + 13n + 18 = (n+2)(2n+9)$, on obtient $\frac{(n+1)(n+2)(2n+9)}{6}$, qui est la formule au rang $n+1$.**Conclusion.** Pour tout $n \geq 1$, $\rightsquigarrow \sum_{k=1}^n k(k+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.

Exercice 3 • Divisibilité par 6

Initialisation. Pour $n = 0$: $0^3 + 5 \times 0 = 0 = 6 \times 0$. Vrai au rang 0.**Hérédité.** Supposons $n^3 + 5n = 6k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = \underbrace{(n^3 + 5n)}_{=6k} + 3n(n+1) + 6.$$

Or $n(n+1)$ est le produit de deux entiers consécutifs, donc il est pair : $n(n+1) = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$, d'où $3n(n+1) = 6m$. Ainsi $(n+1)^3 + 5(n+1) = 6(k+m+1)$.**Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rightsquigarrow 6$ divise $n^3 + 5n$.

Exercice 4 • Comparaison et gendarmes

a) Pour tout $n \geq 1$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $\frac{2n-1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{2n+1}{n+1}$. Ces deux bornes tendent vers 2 (quotient de deux polynômes de même degré), donc par le théorème des gendarmes $\rightsquigarrow \lim u_n = 2$.b) Pour tout n , $\cos(n) \geq -1$, donc $v_n \geq n - \sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n} - 1)$. Or $\sqrt{n}(\sqrt{n} - 1) \rightarrow +\infty$, donc par comparaison $\rightsquigarrow \lim v_n = +\infty$.c) De $-n \leq (-1)^n n \leq n$ on tire $\frac{n^2 - n}{2n^2 + 1} \leq w_n \leq \frac{n^2 + n}{2n^2 + 1}$. Ces deux bornes tendent vers $\frac{1}{2}$, donc $\rightsquigarrow \lim w_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 5 • Une somme avec des puissances de 2

1. **Initialisation.** Pour $n = 1$: $\frac{1}{2}$ d'une part, $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ d'autre part. Vrai au rang 1.**Hérédité.** Supposons $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2(n+2) - (n+1)}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}},$$

ce qui est la formule au rang $n+1$.**Conclusion.** Pour tout $n \geq 1$, $\rightsquigarrow \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.2. $\frac{n+2}{2^n} = \frac{n}{2^n} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$, donc $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2$.

Exercice 6 • Suite définie par une fonction polynôme

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x}{3}$, donc $f' \geq 0$ sur $[0; 1]$: f est croissante sur $[0; 1]$. Par croissance, si $0 \leq x \leq 1$ alors $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$, soit $\frac{2}{3} \leq f(x) \leq 1$. $\rightsquigarrow$ Si $x \in [0; 1]$, alors $f(x) \in [0; 1]$.

2. Initialisation. $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = \frac{2}{3} : 0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$. Vrai au rang 0.

Hérédité. Supposons $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$. Comme f est croissante sur $[0; 1] : f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$, soit $\frac{2}{3} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$, et a fortiori $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rightsquigarrow 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

3. (u_n) est croissante et majorée par 1 : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel $\ell \in [0; 1]$. De plus $f(x) = x \iff x^2 + 2 = 3x \iff x^2 - 3x + 2 = 0 \iff (x-1)(x-2) = 0$, donc $x = 1$ ou $x = 2$. Par continuité de f , $\ell = f(\ell)$, donc $\ell \in \{1; 2\}$; comme $\ell \leq 1$, $\rightsquigarrow \ell = 1$.

Exercice 7 • Extrait de bac — Métropole, mars 2021

1. $u_1 = \frac{3}{4} \times 1 + 0 + 1 = \frac{7}{4}$ et $u_2 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{21}{16} + \frac{20}{16} = \frac{41}{16}$.

2. a. Initialisation. $u_0 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 1$. Vrai au rang 0.

Hérédité. Supposons $n \leq u_n \leq n+1$. En multipliant par $\frac{3}{4} > 0$ puis en ajoutant $\frac{n}{4} + 1$:

$$\frac{3n}{4} + \frac{n}{4} + 1 \leq u_{n+1} \leq \frac{3(n+1)}{4} + \frac{n}{4} + 1, \quad \text{soit} \quad n+1 \leq u_{n+1} \leq n + \frac{7}{4}.$$

Comme $n + \frac{7}{4} \leq n+2$, on obtient $n+1 \leq u_{n+1} \leq (n+1)+1$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rightsquigarrow n \leq u_n \leq n+1$.

b. Pour tout $n : u_{n+1} \geq n+1 \geq u_n$, donc $\rightsquigarrow (u_n)$ est croissante. De plus $u_n \geq n$ et $\lim n = +\infty$, donc par comparaison $\rightsquigarrow \lim u_n = +\infty$.

c. Pour $n \geq 1$, en divisant $n \leq u_n \leq n+1$ par $n > 0 : 1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$. Par le théorème des gendarmes, $\rightsquigarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

3. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{3}{4}u_n + \frac{n}{4} + 1 - n - 1 = \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}(u_n - n) = \frac{3}{4}v_n$. $\rightsquigarrow (v_n)$ est géométrique de raison $\frac{3}{4}$, de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 1$.

b. Donc $v_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, et comme $u_n = v_n + n : \rightsquigarrow u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice 8 • Une minoration par récurrence

1. Initialisation. Pour $n = 1 : S_1 = 1$ et $\sqrt{1} = 1$. Vrai au rang 1.

Hérédité. Supposons $S_n \geq \sqrt{n}$. Alors $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Or

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 - (n+1)}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n(n+1)} - n}{\sqrt{n+1}} \geq 0,$$

car $n(n+1) \geq n^2$ donne $\sqrt{n(n+1)} \geq n$. Donc $S_{n+1} \geq \sqrt{n+1}$.

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $\rightsquigarrow S_n \geq \sqrt{n}$.

2. Comme $\lim \sqrt{n} = +\infty$, par comparaison $\rightsquigarrow \lim S_n = +\infty$.

Exercice 9 • Une suite qui approche $\sqrt{2}$

1. $u_1 = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2} = 1,5$ et $u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} \approx 1,417$.

2. Initialisation. $u_0 = 2 > 0$. **Hérédité.** Si $u_n > 0$, alors $u_n + \frac{2}{u_n} > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) > 0$. **Conclusion.** $\rightsquigarrow u_n > 0$ pour tout n (en particulier la suite est bien définie).

3. Pour tout $n :$

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geq 0$$

car $u_n > 0$. Donc $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; comme de plus $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$, $\rightsquigarrow u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n} \leq 0$, car $u_n \geq \sqrt{2}$ entraîne $u_n^2 \geq 2$. $\rightsquigarrow (u_n)$ est décroissante.

5. (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$: elle converge vers un réel $\ell \geq \sqrt{2} > 0$. En passant à la limite dans $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) : \ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$, soit $2\ell^2 = \ell^2 + 2$, d'où $\ell^2 = 2$ et $\rightsquigarrow \ell = \sqrt{2}$. (C'est la méthode de Héron : u_4 approche déjà $\sqrt{2}$ avec une erreur inférieure à 10^{-11} .)

Exercice 10 • Extrait de bac — Centres étrangers, mars 2021

Partie A.

1. $a_1 = 0,85 \times 200 + 450 = 620$.

2. Chaque mois, 85 % des télétravailleurs du mois précédent continuent, ce qui représente $0,85 a_n$, et 450 s'ajoutent : $\rightsquigarrow a_{n+1} = 0,85 a_n + 450$.

3. a. $v_{n+1} = a_{n+1} - 3\,000 = 0,85a_n + 450 - 3\,000 = 0,85(v_n + 3\,000) - 2\,550 = 0,85v_n$. $\rightsquigarrow (v_n)$ est géométrique de raison 0,85, de premier terme $v_0 = 200 - 3\,000 = -2\,800$.
 b. $v_n = -2\,800 \times 0,85^n$, donc $\rightsquigarrow a_n = -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000$.
4. Comme $-1 < 0,85 < 1$, $\lim 0,85^n = 0$, donc $\rightsquigarrow \lim a_n = 3\,000$: à long terme, le nombre de télétravailleurs se stabilise autour de 3 000 collaborateurs (sans jamais l'atteindre).

Partie B.

1. f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{5(x+2) - (5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2} > 0$: $\rightsquigarrow f$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
2. a. **Initialisation.** $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{5+4}{1+2} = 3$: $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$. Vrai au rang 0.
Hérédité. Supposons $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$. Par croissance de f : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$, soit $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$ (car $f(0) = 2$ et $f(4) = \frac{24}{6} = 4$), donc a fortiori $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rightsquigarrow 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
 b. (u_n) est croissante et majorée par 4 : d'après le théorème de convergence monotone, $\rightsquigarrow (u_n)$ converge.
3. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $3 \times (\frac{1}{2})^n \rightarrow 0$; par le théorème des gendarmes, $4 - u_n \rightarrow 0$, donc $\rightsquigarrow \lim u_n = 4$: à long terme, 4 000 collaborateurs seront satisfaits par cette mesure.

Exercice 11 • Extrait de bac — Métropole, 17 juin 2025

1. $u_1 = -0,02 \times 1^2 + 1,3 \times 1 = 1,28$: $\rightsquigarrow$ environ 1,28 ha au premier juillet 2025.
2. a. **Initialisation.** $u_0 = 1$ et $u_1 = 1,28$: $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 20$. Vrai au rang 0.
Hérédité. Supposons $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$. Comme h est croissante sur $[0; 20]$: $h(1) \leq h(u_n) \leq h(u_{n+1}) \leq h(20)$, soit $1,28 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 18$. Comme $1 \leq 1,28$ et $18 \leq 20$, on a bien $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 20$.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rightsquigarrow 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.
 b. (u_n) est croissante (car $u_n \leq u_{n+1}$) et majorée par 20 : d'après le théorème de convergence monotone, $\rightsquigarrow (u_n)$ converge vers un réel L .
 c. h est une fonction polynôme, donc continue : en passant à la limite dans $u_{n+1} = h(u_n)$, on obtient $L = -0,02L^2 + 1,3L$, soit $0,02L^2 = 0,3L$, c'est-à-dire $L(0,02L - 0,3) = 0$: $L = 0$ ou $L = 15$. Or (u_n) est croissante donc $L \geq u_0 = 1$: $\rightsquigarrow L = 15$.
3. a. La suite est croissante et converge vers $15 > 14$. Ses termes se rapprochent donc de 15 par valeurs inférieures : tout intervalle ouvert contenant 15, en particulier $]14; 16[$, contient tous les termes à partir d'un certain rang.
 $\rightsquigarrow$ La superficie dépassera donc un jour 14 ha.
- b. `def seuil(): n=0 u=1 while u <= 14 : n=n+1 u=-0.02*u**2+1.3*u return n`
 (l'algorithme renvoie $n = 18$: d'après ce modèle, la superficie dépassera 14 ha au premier juillet 2042).

Exercice 12 • Deux résultats du cours à démontrer

1. Supposons par l'absurde qu'il existe un entier N tel que $u_N > \ell$, et posons $\varepsilon = u_N - \ell > 0$. L'intervalle ouvert $]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$ contient ℓ , donc il contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0 : pour tout $n \geq n_0$, $u_n < \ell + \varepsilon = u_N$. Mais pour $n \geq \max(N, n_0)$, la croissance de (u_n) donne $u_n \geq u_N$: contradiction. $\rightsquigarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$.
2. Soit A un réel quelconque. La suite n'étant pas majorée, A n'est pas un majorant : il existe un rang N tel que $u_N > A$. Par croissance, pour tout $n \geq N$: $u_n \geq u_N > A$. Ainsi tout intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes à partir d'un certain rang : $\rightsquigarrow \lim u_n = +\infty$.