

# Chapitre 1 – Nombres complexes

point de vue algébrique et polynômes

Terminale – Mathématiques expertes | Pr. Elakili | Site web : missionmaths360.com

## 1. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

### Théorème • Ensemble des nombres complexes

Il existe un ensemble, noté  $\mathbb{C}$ , appelé ensemble des **nombres complexes**, tel que :

- $\mathbb{C}$  contient  $\mathbb{R}$  ;
- $\mathbb{C}$  contient un élément noté  $i$  vérifiant  $i^2 = -1$  ;
- $\mathbb{C}$  est muni d'une addition et d'une multiplication qui ont les mêmes propriétés que dans  $\mathbb{R}$ .

### Propriété • Forme algébrique

Tout  $z \in \mathbb{C}$  s'écrit de manière **unique** sous la forme  $z = a + ib$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$a = \operatorname{Re}(z)$  est la **partie réelle**,  $b = \operatorname{Im}(z)$  la **partie imaginaire** de  $z$  (attention :  $\operatorname{Im}(z) = b$  et non  $ib$ ).

Si  $b = 0$ ,  $z$  est réel ; si  $a = 0$ ,  $z$  est **imaginaire pur**. L'ensemble des imaginaires purs est noté  $i\mathbb{R}$ .

### Théorème • Égalité dans $\mathbb{C}$

Soient  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  avec  $a, b, a', b'$  réels. Alors

$$z = z' \iff a = a' \text{ et } b = b'.$$

En particulier :  $z = 0 \iff \operatorname{Re}(z) = 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 0$ .

**Démonstration.** Le sens réciproque est immédiat. Si  $z = z'$ , alors  $a - a' = i(b' - b)$ . Supposons  $b \neq b'$  : alors  $i = \frac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R}$ , donc  $i^2 \geq 0$ , ce qui contredit  $i^2 = -1$ . Ainsi  $b = b'$ , puis  $a - a' = 0$ .  $\square$

## 2. Opérations dans $\mathbb{C}$

### Propriété • Somme et produit

Pour  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  ( $a, b, a', b'$  réels) :

$$z + z' = (a + a') + i(b + b'), \quad zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

**Démonstration.** On développe comme dans  $\mathbb{R}$  :  $zz' = aa' + iab' + ia'b + i^2bb'$  et on utilise  $i^2 = -1$ .  $\square$

### Définition • Opposé, inverse, quotient

- L'**opposé** de  $z = a + ib$  est  $-z = -a - ib$  ; on pose  $z - z' = z + (-z')$ .
- Tout  $z = a + ib \neq 0$  admet un unique **inverse**  $\frac{1}{z}$  tel que  $z \times \frac{1}{z} = 1$  :  $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$ .
- Si  $z' \neq 0$ , le **quotient** est  $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$ .

**Démonstration (inverse).**  $z \neq 0$  donc  $(a, b) \neq (0, 0)$  et  $a^2 + b^2 > 0$ . De plus  $(a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$ , d'où  $\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$ .  $\square$

**Exemple.**  $\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$ .

**Remarque.** Méthode : pour mettre un quotient sous forme algébrique, on multiplie numérateur et dénominateur par le *conjugué* du dénominateur (voir §3).

### 3. Conjugué d'un nombre complexe

#### Définition • Conjugué

Le **conjugué** de  $z = a + ib$  ( $a, b$  réels) est le nombre complexe  $\bar{z} = a - ib$ .

#### Propriété • Propriétés du conjugué

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$\begin{array}{lll} \textcircled{1} z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) & \textcircled{2} z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z) & \textcircled{3} \bar{\bar{z}} = z \\ \textcircled{4} z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z & \textcircled{5} z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z \end{array}$$

**Démonstration.** ①, ②, ③ : calcul direct avec  $z = a + ib$ .

④ :  $z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(z) = 0 \iff z - \bar{z} = 0$ . ⑤ :  $z \in i\mathbb{R} \iff \operatorname{Re}(z) = 0 \iff z + \bar{z} = 0$ .  $\square$

#### Propriété • Conjugué et opérations

Pour tous  $z, z' \in \mathbb{C}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{array}{l} \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \quad \overline{zz'} = \bar{z} \bar{z}', \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n, \\ \text{si } z \neq 0 : \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}, \quad \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}. \end{array}$$

**Démonstration.** *Produit.* Avec  $z = a + ib$ ,  $z' = a' + ib'$  :  $\overline{zz'} = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$  et  $\bar{z}\bar{z}' = (a - ib)(a' - ib') = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$ . La somme se traite de même.

*Puissance (récurrence).*  $\bar{z}^0 = 1 = (\bar{z})^0$ . Si  $\bar{z}^n = (\bar{z})^n$ , alors  $\bar{z}^{n+1} = \bar{z}^n \times \bar{z} = \bar{z}^n \bar{z} = (\bar{z})^n \bar{z} = (\bar{z})^{n+1}$ .

*Inverse.*  $z \times \frac{1}{z} = 1$  donc, par le produit,  $\bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \bar{1} = 1$ , d'où le résultat. Le quotient s'en déduit :  $\overline{z' \times \frac{1}{z}} = \bar{z}' \times \frac{1}{\bar{z}}$ .  $\square$

**Remarque.** Pour tout  $z = a + ib$  :  $z\bar{z} = a^2 + b^2$  est un réel positif. C'est l'outil clé du calcul d'inverses.

**Exemple.** Résoudre  $2z + \bar{z} = 3 - 2i$  : on pose  $z = a + ib$ , d'où  $3a + ib = 3 - 2i$ , soit  $a = 1$ ,  $b = -2$  :  $S = \{1 - 2i\}$ .

### 4. Binôme de Newton et équations du second degré

#### Propriété • Formule du binôme de Newton

Pour tous  $a, b \in \mathbb{C}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ .

**Démonstration.** Par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$  : les deux membres valent 1. Supposons la formule vraie au rang  $n$ . Alors

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}. \end{aligned}$$

En isolant les termes  $k = n + 1$  et  $k = 0$  puis en utilisant la relation de Pascal  $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ , on obtient  $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$ .  $\square$

**Exemple.**  $(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4$ .

**Propriété • Équation  $z^2 = a$ , avec  $a$  réel**

Si  $a > 0$  : deux solutions réelles  $\sqrt{a}$  et  $-\sqrt{a}$ . Si  $a = 0$  : une solution 0. Si  $a < 0$  : deux solutions complexes  $i\sqrt{|a|}$  et  $-i\sqrt{|a|}$ .

**Démonstration** (cas  $a < 0$ ).  $(i\sqrt{|a|})^2 = i^2|a| = -|a| = a$ , donc  $z^2 - a = z^2 - (i\sqrt{|a|})^2 = (z - i\sqrt{|a|})(z + i\sqrt{|a|})$ , qui s'annule si et seulement si  $z = \pm i\sqrt{|a|}$ .  $\square$

**Théorème • Équation du second degré à coefficients réels**

Soit  $az^2 + bz + c = 0$  avec  $a, b, c$  réels,  $a \neq 0$ , et  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- Si  $\Delta > 0$  : deux solutions réelles  $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ .
- Si  $\Delta = 0$  : une unique solution réelle  $z_0 = -\frac{b}{2a}$ .
- Si  $\Delta < 0$  : deux solutions complexes **conjuguées**  $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \bar{z}_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ .

Dans tous les cas,  $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$  (avec  $z_1 = z_2 = z_0$  si  $\Delta = 0$ ).

**Démonstration** (cas  $\Delta < 0$ ). Forme canonique :  $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ . Comme  $\Delta < 0$ ,  $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$ , d'où la factorisation  $a\left(z + \frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$  et le résultat par produit nul.  $\square$

**Exemple.**  $z^2 - 4z + 5 = 0$  :  $\Delta = -4 < 0$ , donc  $S = \left\{\frac{4-2i}{2}; \frac{4+2i}{2}\right\} = \{2-i; 2+i\}$ .

## 5. Polynômes : factorisation et racines

**Définition • Polynôme, racine**

Un **polynôme de degré  $n$**  ( $n \in \mathbb{N}$ ) à coefficients réels est une fonction de la forme  $P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$  où  $c_0, \dots, c_n$  sont réels et  $c_n \neq 0$ .

Un complexe  $\alpha$  est une **racine** de  $P$  si  $P(\alpha) = 0$ .

**Propriété • Factorisation de  $z^n - \alpha^n$**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tous  $z, \alpha \in \mathbb{C}$  :

$$z^n - \alpha^n = (z - \alpha) (z^{n-1} + \alpha z^{n-2} + \dots + \alpha^{n-2} z + \alpha^{n-1}) = (z - \alpha) \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k z^{n-1-k}.$$

Le second facteur est un polynôme en  $z$  de degré  $n - 1$ .

**Démonstration.** On développe :  $(z - \alpha) \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k z^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k z^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{k+1} z^{n-1-k}$ . Tous les termes se télescopent sauf le premier  $z^n$  et le dernier  $-\alpha^n$ .  $\square$

**Théorème • Factorisation par  $z - \alpha$**

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n \geq 1$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$  une racine de  $P$ . Alors il existe un polynôme  $Q$  de degré  $n - 1$  tel que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z) = (z - \alpha) Q(z)$ .

**Démonstration.** Comme  $P(\alpha) = 0$  :  $P(z) = P(z) - P(\alpha) = \sum_{k=1}^n c_k (z^k - \alpha^k)$ . D'après la propriété précédente, chaque  $z^k - \alpha^k$  s'écrit  $(z - \alpha)Q_k(z)$  avec  $Q_k$  de degré  $k - 1$ . On factorise :  $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$  avec  $Q = \sum_{k=1}^n c_k Q_k$ , de degré  $n - 1$  (seul  $c_n Q_n$  apporte le terme  $c_n z^{n-1}$ , et  $c_n \neq 0$ ).  $\square$

### Théorème • Nombre de racines

Un polynôme non nul de degré  $n$  admet **au plus  $n$  racines** dans  $\mathbb{C}$ .

Conséquence : une équation polynomiale de degré  $n$  admet au plus  $n$  solutions.

**Démonstration.** Par récurrence sur  $n$ . Un polynôme de degré 0 est une constante non nulle : aucune racine. Supposons le résultat vrai au rang  $n$  et soit  $P$  de degré  $n + 1$ . Si  $P$  n'a pas de racine, c'est fini. Sinon, soit  $\alpha$  une racine :  $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$  avec  $Q$  de degré  $n$ . Si  $P(\beta) = 0$ , alors  $\beta = \alpha$  ou  $Q(\beta) = 0$  (produit nul). Or  $Q$  a au plus  $n$  racines, donc  $P$  en a au plus  $n + 1$ .  $\square$

**Exemple.**  $z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0$  : 2 est racine. Par identification,  $z^3 - 2z^2 + z - 2 = (z - 2)(z^2 + 1)$ , d'où  $S = \{2; -i; i\}$ .

**Remarque.** Méthode pour une équation de degré 3 dont on connaît une racine  $\alpha$  : écrire  $P(z) = (z - \alpha)(az^2 + bz + c)$ , développer, identifier les coefficients, puis résoudre l'équation du second degré obtenue.