

COURS DE MATHÉMATIQUES

Le second degré

Classe de Première — Spécialité Mathématiques

Pr. Elakili

Support de cours

Site web

missionmaths360.com

Au programme de ce chapitre : 1. Fonction polynôme de degré 2 (définition, forme canonique, variations) • 2. Équations du second degré • 3. Propriétés d'un trinôme (somme et produit des racines, factorisation, signe).

1 Fonction polynôme de degré 2

a Définition

DÉFINITION — Fonction polynôme de degré 2

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une **fonction polynôme de degré 2** s'il existe des réels a , b et c , avec $a \neq 0$, tels que, pour tout réel x :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Remarque. Une fonction polynôme de degré 2 est aussi appelée *fonction trinôme du second degré*. Les réels a , b et c sont ses *coefficients*.

EXEMPLE

Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont des fonctions polynômes de degré 2 et préciser leurs coefficients :

$$f(x) = 2x^2 + 3x - \frac{1}{5} ; \quad g(x) = (x + 1)^2 - x^2 ; \quad h(x) = (2x - 1)(x + 3).$$

b Forme canonique

PROPRIÉTÉ ET DÉFINITION — Forme canonique

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Il existe deux réels α et β tels que, pour tout réel x :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Cette écriture est appelée la **forme canonique** de f . De plus,

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha).$$

Remarque. Pour trouver la forme canonique « à la main », on utilise le fait que $x^2 + kx$ est le début du développement de $\left(x + \frac{k}{2}\right)^2$.

EXEMPLES

Déterminer la forme canonique des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 - 6x + 5$;
2. $g(x) = 2x^2 + 8x + 3$.

c Sens de variation

PROPRIÉTÉ — Sens de variation et représentation graphique

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

- Si $a > 0$: f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha]$, strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$, et admet un **minimum** égal à β , atteint en α .
- Si $a < 0$: f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$, strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$, et admet un **maximum** égal à β , atteint en α .

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de f est une **parabole** de sommet $S(\alpha; \beta)$, admettant pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

Si $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$+\infty$	β	$+\infty$

Si $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$-\infty$	β	$-\infty$

EXEMPLES

Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 + 4x - 3$;
2. $g(x) = -2x^2 + 12x + 9$.

2 Équations du second degré

a Définitions

DÉFINITION — Équation du second degré

Une **équation du second degré** à coefficients réels est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a , b et c sont réels avec $a \neq 0$.

DÉFINITION — Racines

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées les **racines** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

EXEMPLE

Écrire chacune des équations suivantes sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ et donner ses coefficients :

$$3x^2 - 2x + 5 = 0 ; \quad (x - 1)(x + 4) = 0 ; \quad x^2 = 7.$$

b Résolution dans $\mathbb{R}$

DÉFINITION — Discriminant

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

PROPRIÉTÉ — Résolution dans $\mathbb{R}$

Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a **aucune solution** dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une **unique solution** $x_0 = -\frac{b}{2a}$; on dit que x_0 est une *racine double* du trinôme.
- Si $\Delta > 0$, l'équation a **deux solutions distinctes** :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

EXEMPLES

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $3x^2 - 5x - 2 = 0$;
2. $x^2 + 2x + 5 = 0$.

3 Propriétés d'un trinôme

a Somme et produit des racines

PROPRIÉTÉ — Somme et produit des racines

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme dont le discriminant est strictement positif. Alors f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 , et :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

EXEMPLES

1. Soit $f(x) = 4x^2 + 4x - 24$. Sachant que 2 est une racine de f , déterminer l'autre racine à l'aide du produit des racines.
2. Déterminer deux réels dont la somme vaut 5 et le produit -14 .

b Factorisation

PROPRIÉTÉ — Factorisation d'un trinôme

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré, de discriminant Δ .

- Si $\Delta > 0$: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les deux racines de f .
- Si $\Delta = 0$: $f(x) = a(x - x_0)^2$, où x_0 est la racine double de f .
- Si $\Delta < 0$: $f(x)$ ne peut pas s'écrire comme un produit de polynômes de degré 1.

EXEMPLES

Factoriser, lorsque c'est possible, les fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$;
2. $g(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

c Signe d'un trinôme

PROPRIÉTÉ — Signe d'un trinôme

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré, de discriminant Δ .

- Si $\Delta < 0$: pour tout réel x , $f(x)$ est du **signe de a** .
- Si $\Delta = 0$: pour tout réel $x \neq -\frac{b}{2a}$, $f(x)$ est du signe de a , et $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$.
- Si $\Delta > 0$: en notant $x_1 < x_2$ les deux racines, $f(x)$ est du signe de a à l'*extérieur* des racines et du signe contraire *entre* les racines.

Si $a > 0$ (cas $\Delta > 0$)

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Si $a < 0$ (cas $\Delta > 0$)

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

EXEMPLES

1. Dresser le tableau de signes de la fonction f définie par $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - x - 6 \leq 0$.